Journal of Information Technology and Computer Science (INTECOMS)
Volume 4 Nomor 2, Desember 2021
e-ISSN : 2614-1574
p-ISSN : 2621-3249

KOMPUTASI NUMERIK METODE ITERATIF HALF-SWEEP PRECONDITIONED GAUSS-SEIDEL UNTUK MEMECAHKAN PERSAMAAN RESEPAN PECAHAN WAKTU

NUMERICAL COMPUTATION HALF-SWEEP PRECONDITIONED GAUSS-SEIDEL METHOD TO SOLVE PRESCRIPTION EQUATIONS IN FRACTION OF TIME

Andang Sunarto
Tadris Matematika, IAIN Bengkulu
andang99@gmail.com

In this study, we derive a finite difference approximation equation from the discretization of the one-dimensional linear time-fractional diffusion equations by using the Caputo's time fractional derivative. A linear system will be generated by the Caputo's finite difference approximation equation. Then the resulting of the linear system has been solved using Half-Sweep Preconditioned Gauss-Seidel (HSPGS) iterative method in which its effectiveness will be compared with the existing Preconditioned Gauss-Seidel (PGS) method (known as Full-Sweep Preconditioned Gauss-Seidel (FSPGS)) and Gauss-Seidel (GS) Method. An example of the problem is presented to test the effectiveness the proposed method. The findings of this study show that the proposed iterative method is superior compared with the FSPGS and GS method.

Keywords : Caputo's fractional derivative, Implicit scheme, HSPGS Method

ABSTRAK

Dalam penelitian ini, peneliti berusaha memperoleh persamaan aproksimasi beda hingga dari diskritisasi persamaan resapan pecahan waktu linier satu dimensi dengan menggunakan turunan pecahan waktu Caputo. Suatu sistem persamaan linier akan dibuat dengan menggunakan persamaan aproksimasi beda hingga Caputo. Kemudian hasil dari system persamaan linier tersebut diselesaikan dengan menggunakan metode iterasif numerik Half-Sweep Preconditioned Gauss-Seidel (HSPGS) dimana efektivitasnya akan dibandingkan dengan metode Preconditioned Gauss-Seidel (PGS), (dikenal juga sebagai Full-Sweep Preconditioned Gauss- Seidel (FSPGS)) dan Gauss-Seidel (GS) sebagai metode kontrol. Contoh masalah juga disajikan untuk menguji efektivitas metode yang diusulkan. Temuan penelitian ini menunjukkan bahwa metode iteratif yang diusulkan yaitu HSPGS lebih unggul dibandingkan dengan metode FSPGS dan GS.

Kata Kunci *:* Turunan pecahan Caputo; Skema Implisit; Metode HSPGS

PENDAHULUAN

Menurut penelitian sebelumnya Agrawal, O. P. (2002), Chaves, A. S. (1998), Diethelm, K., & Freed, A. D. (1999), Mainardi, F. (1997) & Meerschaert, M. M., & Tadjeran, C. (2004) penggunaan persamaan turunan parsial pecahan telah menarik banyak peneliti di bidang matematika, fisika, teknik, kimia untuk mendapatkan solusi numerik dan / atau analitis dari masalah. Misalkan, turunan pecahan menggantikan turunan parsial ruang orde pertama dalam model difusi dan menyebabkan difusi lebih lambat. Dengan mempertimbangkan teknik numerik persamaan resapan pecahan waktu, banyak metode yang diusulkan seperti metode transformasi (Yuste, S. B., & Acedo, L., 2005), elemen hingga bersama-sama dengan metode garis, metode beda hingga eksplisit dan implisit(Yuste, S. B., 2006 & Zhang, 2009). Konsep metode iteratif telah diteliti oleh banyak peneliti seperti Young, Hackbusch dan Saad yang telah telah mengusulkan dan membahas beberapa keluarga metode iteratif. Selain itu, konsep iterasi blok juga telah diperkenalkan oleh Evans, Yousif dan Evans dalam tulisannya juga menunjukkan efisiensi waktu komputasi dari metode iterative tersebut. Di antara metode iteratif yang ada, metode iteratif preconditioned (Ghuang-Hui, 2006, Zhao, 2000, Hoang-hao, 2009, Gunawardena, et.al., 1991, Saad, 1996) telah diterima secara luas sebagai salah satu metode yang efisien untuk menyelesaikan sistem linier.

Tujuan utama dari penelitian ini, adalah menguji efektivitas metode iteratif Half-Sweep Preconditioned Gauss-Seidel (HSPGS) untuk menyelesaikan persamaan beda parsial parabola pecahan waktu berdasarkan persamaan aproksimasi beda hingga implisit Caputo. Untuk menunjukkan kemampuan metode HSPGS ini, dalam artikel ini juga mengimplementasikan metode iteratif Full-Sweep Preconditioned Gauss Seidel (FSPGS) dan Gauss Seidel, sebagai metode kontrol. Untuk menunjukkan efisiensi metode HSPGS ini, dipertimbangkan persamaan beda parsial parabola pecahan waktu didefinisikan sebagai

$$\frac{\partial^\alpha U(x,t)}{\partial^\alpha} = a(x)\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} + c(x)U(x,t) \quad (1)$$

dimana a(x), b(x) dan c(x) adalah fungsi atau konstanta yang diketahui, sedangkan α adalah parameter yang mengacu pada turunan orde pecahan waktu.

Susunan bagian dalam artikel ini adalah sebagai berikut: dalam bagian selanjutnya setelah pedahuluan dibahas suatu aproksimasi atau perkiraan rumus operator turunan pecahan Caputo dan prosedur numerik untuk menyelesaikan persamaan resapan pecahan waktu (1) dengan menggunakan metode beda hingga implisit yang digunakan. Dalam bagian selanjutnya, perumusan metode iteratif HSPGS diperkenalkan. Kemudian dilanjutkan dengan contoh-contoh soalan numerik yang akan di uji dan hasil serta kesimpulannya, diberikan dalam Bagian terakhir

APROKSIMASI BEDA HINGGA CAPUTO

Sebelum mengembangkan persamaan diskrit masalah (1). Pada bagian ini, beberapa definisi dasar untuk teori turunan pecahan yang digunakan dalam makalah ini.

Definisi 1. [8] Operator integral pecahan Riemann-Liouville , J^α orde- α didefinisikan sebagai

$$J^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^\alpha f(t)dt \ , \ \alpha > 0, x > 0 \quad (2)$$

Definisi 2.[8] Operator turunan parsial pecahan Caputo, D^α orde - α didefinisikan sebagai

$$D^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^x \frac{f^{(m)}(t)}{(x-t)^{\alpha-m+1}}dt, \ \alpha > 0 \quad (3)$$

dengan $m-1 < \alpha \le m,\ m \in N,\ x > 0$

Tulisan ini mencoba mengkaji metode iteratif Half-Sweep Preconditioned Gauss-Seidel (HSPGS) yang dibandingkan dengan metode iteratif Full-Sweep Preconditioned Gauss-Seidel (FSPGS) dan Gauss-Seidel (GS) untuk menyelesaikan Soal (1) dengan variabel koefisien. Dalam menyelesaikan numerik Soal (1), diperoleh pendekatan numerik berdasarkan definisi turunan Caputo dengan kondisi batas Dirichlet dan mempertimbangkan operator turunan pecahan non-lokal. Persamaan aproksimasi ini dapat dikategorikan sebagai skema stabil tanpa syarat. Pada kekuatan Soal (1), domain solusi dari masalah telah dibatasi ke domain ruang hingga, $0 \le x \le \gamma$ dengan $0 < \alpha < 1$, sedangkan parameter mengacu pada orde pecahan dari turunan ruang. Untuk penyelesaian Soal (1), perhatikan kondisi awal dan batas Soal (1) diberikan sebagai

$$U(0,t)=g_0(t),\ U(\ell,t)=g_1(t),$$

dan kondisi awal

$$U(x,0)=f(x),$$

dimana $g_0(t), g_1(t)$, dan $f(x)$, adalah suatu fungsi. Pendekatan diskrit terhadap turunan pecahan waktu dalam Persamaan. (1), kami menganggap turunan parsial pecahan Caputo dari order-α , yang didefinisikan oleh [8,9]

$$\frac{\partial^\beta u(x,t)}{\partial x^\beta}=\frac{1}{\Gamma(2-\beta)}\int_0^\infty \frac{\partial^2 u(x-s)}{\partial t^2}(t-s)^{1-\beta}ds,\quad t>0,1<\beta\le 2$$

(4)

Berdasarkan Persamaan. (4), rumusan turunan parsial pecahan Caputo dari metode aproksimasi orde pertama diberikan sebagai:

$$D_t^\alpha U_{i,n}\cong\sigma_{\alpha,k}\sum_{j=1}^{n}\omega_j^{(\alpha)}\left(U_{i,n-j+1}-U_{i,n-j}\right)$$

(5)

Dan kemudian ditetapkan sebagai berikut:

$$\sigma_{\alpha,k}=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)k^\alpha}$$

dan $\omega_j^{(\alpha)}=j^{1-\alpha}-(j-1)^{1-\alpha}$.

Sebelum mendiskritisasi Masalah (1), domain solusi masalah dipartisi secara seragam. Untuk melakukan ini, dipertimbangkan beberapa bilangan bulat positif m dan n di mana ukuran grid dalam arah ruang dan waktu untuk algoritma beda hingga didefinisikan sebagai $h=\Delta x=\frac{\gamma-0}{m}$ dan $k=\Delta t=\frac{T}{n}$. Berdasarkan ukuran grid ini, dibangun jaringan grid seragam dari domain solusi di mana titik-titik grid dalam interval ruang $[0,\gamma]$ ditunjukkan sebagai angka $x_i=ih,\ i=0,1,2,\ldots,m$ dan titik-titik grid dalam interval waktu $[0,T]$ diberi label $t_j=jk,$. Kemudian nilai-nilai fungsi $U(x,t)$ pada titik-titik grid dilambangkan sebagai $U_{i,j}=U(x_i,t_j)$ Dengan menggunakan persamaan. (5) dan skema diskritisasi beda hingga implisit, persamaan aproksimasi beda hingga implisit Caputo dari Soal (1) ke titik grid yang berpusat di $(x_i,t_j)=(ih,nk)$ diberikan sebagai

$$\sigma_{\alpha,k}\sum_{j=1}^{n}\omega_j^{(\alpha)}\left(U_{i,n-j+1}-U_{i,n-j}\right)$$
$$=a_i\frac{1}{4h^2}\left(U_{i-2,n}-2U_{i,n}+U_{i+2,n}\right)+b_i\frac{1}{4h}\left(U_{i+2,n}-U_{i-2,n}\right)+c_iU_{i,n},$$

(6)

untuk i=1,2...,m-1.

Menurut Persamaan. (6), persamaan aproksimasi ini dikenal sebagai persamaan aproksimasi beda hingga implisit penuh yang konsisten dengan akurasi orde satu dalam waktu dan orde kedua dalam ruang. Pada dasarnya, persamaan aproksimasi (6) dapat ditulis ulang berdasarkan tingkat waktu yang ditentukan. Untuk $n\ge 2$:

$$\sigma_{\alpha,k}\sum_{j=1}^{n}\omega_j^{(\alpha)}\left(U_{i,n-j+1}-U_{i,n-j}\right)=\left(\frac{a_i}{4h^2}-\frac{b_i}{4h}\right)U_{i-2,n}+\left(c_i-\frac{a_i}{2h^2}\right)U_{i,n}+\left(\frac{a_i}{4h^2}+\frac{b_i}{4h}\right)U_{i+2,n},$$

(7a)

$$\therefore\sigma_{\alpha,k}\sum_{j=1}^{n}\omega_j^{(\alpha)}\left(U_{i,n-j+1}-U_{i,n-j}\right)=p_iU_{i-2,n}+q_iU_{i,n}+r_iU_{i+2,n},$$

dimana

$$p_i=\frac{a_i}{4h^2}-\frac{b_i}{4h},\ q_i=c_i-\frac{a_i}{2h^2},\ r_i=\frac{a_i}{4h^2}+\frac{b_i}{4h}$$

untuk *n = 1,*

$$-p_iU_{i-2,1}+q_i^*U_{i,1}-r_iU_{i+2,1}=f_{i,1},\quad i=1,2,\ldots,m-1$$

(7b)

dengan

$$\omega_j^{(\alpha)} = 1\,,\, q_i^* = \sigma_{\alpha,k} - q_i\,,\; f_{i,1} = \sigma_{\alpha,k} U_{i,1}\,.$$

Menurut Persamaan. (7b), dapat dilihat bahwa sistem linier tridiagonal dapat dibangun dalam bentuk matriks sebagai berikut

$$A\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{f}$$

(8)

dengan

$$A = \begin{bmatrix} q_1^* & -r_1 & & & & \\ -p_2 & q_2^* & -r_2 & & & \\ & -p_3 & q_3^* & -r_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -p_{m-2} & q_{m-2}^* & -r_{m-2} \\ & & & & -p_{m-1} & q_{m-1}^* \end{bmatrix}_{(m-1)x(m-1)}$$

$$\underset{\sim}{U} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{21} & U_{31} & \cdots & U_{m-2,1} & U_{m-1,1} \end{bmatrix}^T$$

$$\underset{\sim}{f} = \begin{bmatrix} U_{11} + p_1 U_{01} & U_{21} & U_{31} & \cdots & U_{m-2,1} & U_{m-1,1} + p_{m-1} U_{m,1} \end{bmatrix}^T$$

PERUMUSAN METODE HALF-SWEEP PRECONDITIONED GAUSS-SEIDEL

Seperti disebutkan di atas, sistem linier tridiagonal dalam Persamaan. (8), jelas bahwa karakteristik matriks koefisiennya berskala besar dan jarang. Sebenarnya konsep berbagai metode iteratif telah dirintis dan dilakukan oleh banyak peneliti seperti, Young , Hackbusch, Saad, Evans, Yousif and Evans dan Othman dan Abdullah. Untuk menyelesaikan sistem linier tridiagonal, Abdullah memprakarsai metode Half-Swep Gauss-Seidel (HSGS), yang merupakan teknik iteratif yang paling dikenal dan banyak digunakan untuk menyelesaikan setiap sistem linier. Selain itu konsep iterasi Half-Sweep telah dipelajari secara luas oleh banyak peneliti; Seperti Ibrahim dan abdulah, Othman dan Abdullah, Suliaman dkk., Aruchunan dan Sulaiman, Muthuvalu dan Sulaiman dan Yousif dan dan disebutkan di bagian atas, banyak peneliti telah membahas berbagai metode preconditioned seperti Ghuang-Hui, Zhao , Hoang-hao, Gunawardena, Young, Hackbusch, Saad, Yousif dan Evans. Untuk mendapatkan solusi numerik dari sistem linier tridiagonal (8), kami mempertimbangkan metode iteratif Half-Sweep Preconditioned Gauss-Seidel (HSPGS) yang paling dikenal dan digunakan secara luas untuk menyelesaikan setiap sistem linier(Kohno, et. al., 1997).

Sebelum menerapkan metode iteratif HSPGS, perlu mentransformasikan sistem linier dalam persamaan (8) menjadi preconditioned sistem linier

$$A^* \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{f}^*$$

(9)

dengan,

$$A^* = PAP^T\,,\; \underset{\sim}{f}^* = P\,\underset{\sim}{f}\,,\quad \underset{\sim}{U} = P^T\,\underset{\sim}{x}\,.$$

Sebenarnya, matriks P disebut preconditioned matriks dan didefinisikan sebagai [19]

$$P = I + S$$

dimana

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -r_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(m-1)x(m-1)}$$

dan matriks I adalah matriks identik. Untuk merumuskan metode HSPGS, matriks koefisien A^* pada persamaan (8) dinyatakan sebagai penjumlahan dari ketiga matriks

$$A^{*} = D - L - V \tag{10}$$

di mana D, L dan V berturut-turut adalah matriks diagonal, segitiga bawah, dan segitiga atas. Dengan menggunakan Persamaan. (8) dan (10), rumusan metode iteratif HSPGS dapat didefinisikan secara umum sebagai [9,16,17,18,19]

$$\underset{\sim}{x}^{(k+1)} = (D-L)^{-1} V \underset{\sim}{x}^{(k)} + (D-L)^{-1} \underset{\sim}{f}^{*}$$

(11)

di mana $\underset{\sim}{x}^{(k+1)}$ mewakili vektor yang tidak diketahui pada (k+1) iterasi. Implementasi metode iteratif HSPGS dapat dijelaskan pada Algoritma 1.

Algorithm 1: HSPGS method

i. Set $\tilde{U} \leftarrow 0$ dan $\varepsilon \leftarrow 10^{-10}$.

ii. Untuk $j = 1,2,\ldots,n$ implementasikan

Untuk $i = 1,2,\ldots,m-1$ hitung

$$\underset{\sim}{x}^{(k+1)} = (D-L)^{-1} V \underset{\sim}{x}^{(k)} + (D-L)^{-1} \underset{\sim}{f}^{*}$$

$$\underset{\sim}{U}^{(k+1)} = P^{T} \underset{\sim}{x}^{(k+1)}$$

Test Konvergen. Jika kriteria konvergen adalah $\left\| \underset{\sim}{U}^{(k+1)} - \underset{\sim}{U}^{(k)} \right\| \le \varepsilon = 10^{-10}$ terpenuhi, Menuju Step (iii). Jika tidak kembali ke Step (i).

iii Tampilkan Solusi Aproksimasi

PERHITUNGAN NUMERIK (12Pt, Bold)

Pada bagian t ini, salah dua contoh persamaan reapan pecahan waktu diberikan untuk menggambarkan akurasi dan efektivitas sifat dari metode Gauss-Seidel (GS) dan Full-Sweep Gauss-Seidel (FSPGS) dan Half-Sweep Preconditioned Gauss-Seidel (HSPGS). Sebagai perbandingan, ada tiga kriteria yang dipertimbangkan seperti jumlah iterasi (K), waktu eksekusi (dalam detik) dan kesalahan absolut maksimum (Max Error) pada tiga nilai yang berbeda yaitu = 0,25, = 0,50 dan = 0,75. Untuk implementasi tiga skema iterative tersebut, uji konvergensi menggunakan kesalahan toleransi sebesar $\varepsilon = 10^{-10}$.

Soalan 1: [31]

Pertimbangkan masalah nilai batas awal pecahan waktu diberikan sebagai berikut

$$\frac{\partial^{\alpha} U(x,t)}{\partial t^{\alpha}} = \frac{\partial^{2} U(x,t)}{\partial x^{2}}, \quad 0 < \alpha \le 1, 0 \le x \le \gamma, \quad t > 0$$

(12)

di mana kondisi batas dinyatakan dalam istilah pecahan

$$U(0,t) = \frac{2kt^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}, \; U(\ell,t) = \ell^{2} + \frac{2kt^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)},$$

(13)

dan kondisi awal

$$U(x,0) = x^{2} \tag{14}$$

Dari persamaan (12), dengan $\alpha = 1$ dapat direduksi menjadi persamaan difusi standar

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^{2} U(x,t)}{\partial x^{2}}, \quad 0 \le x \le \gamma, \quad t > 0$$

(15)

dengan kondisi awal

$$U(x,0) = x^{2},$$

dan kondisi batas

$$U(0,t) = 2kt, \quad U(\ell,t) = \ell^{2} + 2kt,$$

Kemudian solusi analitik dari Persamaan (12) dapat diperoleh sebagai berikut:

$$U(x,t) = x^2 + 2kt.$$

Selanjutnya dengan menerapkan seri

$$U(x,t) = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\partial^n U(x,0)}{\partial t^n} \frac{t^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\partial^{mn+i} U(x,0)}{\partial t^{mn+i}} \frac{t^{n\alpha+i}}{\Gamma(n\alpha+i+1)}$$

dengan $U(x,t)$ dan $0 < \alpha \le 1,$ dapat ditunjukkan bahwa solusi analitik dari Persamaan (12) dapat deperoleh sebagai berikut

$$U(x,t) = x^2 + 2k \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Soalan 2: [31]

Pertimbangkan masalah nilai batas awal pecahan waktu yang didefinisikan sebagai:

$$\frac{\partial^\alpha U(x,t)}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{2} x^2 \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < \alpha \le 1, 0 \le x \le \gamma, \quad t > 0$$

(16)

di mana kondisi batas diberikan dalam bentuk pecahan

$$U(0,t) = 0, U(1,t) = e^t, \tag{17a}$$

dan kondisi awal

$$U(x,0) = x^2. \tag{17b}$$

Dari Persamaan (16), dengan $\alpha = 1$ Persamaan. (16) dapat direduksi menjadi persamaan difusi standar

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{2} x^2 \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 \le x \le \gamma, \quad t > 0$$

(18)

Maka solusi analitik dari Persamaan (16) diperoleh sebagai berikut:

$$U(x,t) = x^2 e^t.$$

kemudian dengan menerapkan seri

$$U(x,t) = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\partial^n U(x,0)}{\partial t^n} \frac{t^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\partial^{mn+i} U(x,0)}{\partial t^{mn+i}} \frac{t^{n\alpha+i}}{\Gamma(n\alpha+i+1)}$$

dengan $U(x,t)$ dan $0 < \alpha \le 1,$ dapat ditunjukkan bahwa solusi analitik dari Persamaan (12) dapat deperoleh sebagai berikut

$$U(x,t) = x^2 \left[1 + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} + \ldots \right]$$

Semua hasil komputasi numerik untuk Persamaan (12) dan (16), yang diperoleh dari implementasi metode iterasi GS, FSPGS dan HSPGS telah dicatat pada Tabel 1 dan Tabel 2 dengan nilai mesh yang berbeda, yaitu m = 128, 256, 512, 1024, dan 2048.

SIMPULAN

Untuk solusi numerik dari masalah persamaan resapan pecahan waktu, artikel ini menyajikan turunan dari persamaan aproksimasi beda hingga implisit Caputo di mana persamaan aproksimasi ini mengarah pada sistem linier tridiagonal. Dari pengamatan terhadap semua hasil komputasi numerik dengan menerapkan metode iteratif GS, FSPGS dan HSPGS, terlihat bahwa jumlah iterasi mengalami penurunan sekitar 71,99-91,07%, yang berarti metode iteratif HSPGS lebih baik dibandingkan dengan metode FSPGS dan GS. Kemudian dalam hal waktu eksekusi, implementasi metode HSPGS jauh lebih cepat sekitar 69,78-95,82% dibandingkan metode FSPGS dan GS. Artinya metode HSPGS membutuhkan jumlah iterasi dan waktu komputasi paling sedikit dibandingkan dengan metode iterasi FSPGS dan GS. Berdasarkan akurasi ketiga metode iteratif, dapat disimpulkan bahwa solusi komputasi numerik HSPGS juga yang paling baik dibandingkan kedua metode lainnya yaitu FSPGS dan GS.

DAFTAR PUSTAKA

Abdullah, A. R. (1991). The four point Explicit Decoupled Group (EDG) method: A fast Poisson solver. *International Journal of Computer Mathematics*, *38*(1-2), 61-70.

Agrawal, O. P. (2002). Solution for a fractional diffusion-wave equation defined in a bounded domain. *Nonlinear Dynamics*, *29*(1), 145-155.

Chaves, A. S. (1998). A fractional diffusion equation to describe Lévy flights. *Physics Letters A*, *239*(1-2), 13-16.

Cheng, G. H., Huang, T. Z., & Cheng, X. Y. (2006). Preconditioned Gauss-Seidel type iterative method for solving linear systems. *Applied Mathematics and Mechanics*, *27*(9), 1275-1279.

Diethelm, K., & Freed, A. D. (1999). On the solution of nonlinear fractional-order differential equations used in the modeling of viscoplasticity. In *Scientific computing in chemical engineering II* (pp. 217-224). Springer, Berlin, Heidelberg.

Evans, D. J. (1985). Group explicit iterative methods for solving large linear systems. *International Journal of Computer Mathematics*, *17*(1), 81-108.

Evans, D. J., & Yousif, W. S. (1986). Explicit Group Iterative Methods for solving elliptic partial differential equations in 3-space dimensions. *International journal of computer mathematics*, *18*(3-4), 323-340.

Gunawardena, A. D., Jain, S. K., & Snyder, L. (1991). Modified iterative methods for consistent linear systems. Linear Algebra and Its Applications, 154, 123-143.

Hackbusch, W. (1994). *Iterative solution of large sparse systems of equations* (Vol. 95, pp. xxii+-429). New York: Springer.

Hhonghao, H., Dongjin, Y., Yi, H., & Jinqiu, X. (2009, May). Preconditioned gauss-seidel iterative method for linear systems. In *2009 International Forum on Information Technology and Applications* (Vol. 1, pp. 382-385). IEEE.

Kohno, T., Kotakemori, H., Niki, H., & Usui, M. (1997). Improving the modified Gauss-Seidel method for Z-matrices. *Linear Algebra and its Applications*, *267*, 113-123.

Mainardi, F. (1997). Fractional calculus. In *Fractals and fractional calculus in continuum mechanics* (pp. 291-348). Springer, Vienna.

Meerschaert, M. M., & Tadjeran, C. (2004). Finite difference approximations for fractional advection–dispersion flow equations. *Journal of computational and applied mathematics*, *172*(1), 65-77.

Othman, M. B., & Bin Abdullah, A. R. (1998). The Halfsweeps Multigrid method as a fast Multigrid Poisson solver. *International journal of computer mathematics*, *69*(3-4), 319-329.

Saad, Y, (1996). *Iterative method for sparse linear systems*. Boston: International Thomas Publishing.

Young, D. M. (2014). *Iterative solution of large linear systems. Elsevier*.

Yuste, S. B., & Acedo, L. (2005). An explicit finite difference method and a new von Neumann-type stability analysis for fractional diffusion equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, *42*(5), 1862-1874.

Yuste, S. B. (2006). Weighted average finite difference methods for fractional diffusion equations. *Journal of Computational Physics*, *216*(1), 264-274.

Zhao, J., Zhang, G., Chang, Y., & Zhang, Y. (2000). *A new preconditioned gauss-seidel method for linear systems, mathematics subject classification*.

Zhang, Y. (2009). A finite difference method for fractional partial differential equation. *Applied Mathematics and Computation, 215*(2), 524-529.