

KAJIAN KEBERADAAN NILAI EIGEN DALAM STRUKTUR MATRIKS ALJABAR MIN-PLUS DAN RELEVANSINYA TERHADAP INDUSTRI PERTAHANAN

Wiwit Melinasari¹, Edy Sulistyadi², Ida Bagus Made

Putra Jandhana³, Suroto⁴

Universitas Pertahanan RI^{1,2,3},

Universitas Jenderal Soedirman⁴

wiwit.melinasari@tp.idu.ac.id¹

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis keberadaan nilai eigen dalam struktur matriks aljabar min-plus dan menjelaskan relevansinya terhadap permasalahan rute terpendek pada sistem logistik pertahanan. Metode yang digunakan adalah studi pustaka terhadap literatur yang membahas teori nilai eigen, vektor eigen, graf *precedence*, bobot rata-rata minimum sirkuit elementer, dan penerapan nilai eigen dalam struktur matriks aljabar min-plus pada penentuan rute terpendek. Hasil penelitian menunjukkan bahwa nilai eigen dalam struktur matriks aljabar min-plus selalu ada karena keberadaan nilai bobot rata-rata minimum sirkuit elementer pada graf *precedence* struktur matriks aljabar min-plus. Nilai eigen ini memiliki interpretasi matematis sebagai waktu siklus minimum dari sistem, sehingga relevan untuk diaplikasikan pada optimasi rute distribusi logistik pertahanan. Simpulan penelitian ini menunjukkan bahwa keberadaan nilai eigen pada struktur matriks aljabar min-plus dapat menjadi dasar matematis dalam perencanaan rute terpendek yang lebih efisien, khususnya untuk meminimalkan keterlambatan distribusi logistik pada sektor pertahanan.

Kata Kunci: Aljabar Min-Plus, Graf *Precedence*, Logistik Pertahanan, Nilai Eigen, Rute Terpendek

ABSTRACT

This study aims to analyze the existence of eigenvalues in the min-plus algebra matrix structure and to explain their relevance to shortest path problems in defense logistics systems. The method used is a literature study of sources discussing the theory of eigenvalues, eigenvectors, precedence graphs, minimum mean weight of elementary circuits, and the application of eigenvalues in the min-plus algebra matrix structure to shortest path determination. The results show that eigenvalues in the min-plus algebra matrix structure always exist due to the existence of the minimum mean weight of elementary circuits in the precedence graph of the min-plus algebra matrix structure. These eigenvalues have a mathematical interpretation as the minimum cycle time of a system, making them relevant for application in optimizing defense logistics distribution routes. The conclusion of this study shows that the existence of eigenvalues in the min-plus algebra matrix structure can serve as a mathematical basis for more efficient shortest path

planning, particularly in minimizing delays in logistics distribution in the defense sector.

Keywords: *Min-plus Algebra, Precedence Graph, Defense Logistics, Eigenvalues, Shortest Path*

PENDAHULUAN

Jika himpunan seluruh bilangan riil dinotasikan dengan $\mathbb{R}$, maka aljabar min-plus adalah himpunan $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ yang dilengkapi oleh dua operasi biner, yaitu operasi penjumlahan yang didefinisikan sebagai nilai minimum dan operasi perkalian yang didefinisikan sebagai penjumlahan biasa seperti pada penjumlahan aljabar linier (Siswanto & Gusmizain, 2024). Berikutnya, himpunan aljabar min-plus dinotasikan dengan $\mathbb{R}_{\min}$ dan $x_1 \oplus x_2 = \min\{x_1, x_2\}$, $x_1 \otimes x_2 = x_1 + x_2$, untuk setiap $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Pada $\mathbb{R}_{\min}$, hanya elemen netral (elemen identitas terhadap operasi penjumlahan) yang memiliki invers terhadap operasi penjumlahan. Struktur aljabar pada $\mathbb{R}_{\min}$ merupakan semilapangan (Siswanto & Gusmizain, 2024).

Matriks atas aljabar min-plus merupakan susunan elemen aljabar min-plus yang terdiri dari baris serta kolom dan diapit oleh dua kurung siku. Operasi pada matriks tersebut dilakukan berdasarkan operasi minimum dan penjumlahan yang berlaku pada aljabar min-plus. Rahayu et al. (2021) menjelaskan bahwa matriks bujur sangkar M atas aljabar min-plus dapat direpresentasikan dalam bentuk graf *precedence* dan dinotasikan dengan $G(M)$. Representasi tersebut menunjukkan hubungan antara elemen-elemen matriks dan lintasan pada graf yang digunakan dalam pembahasan nilai eigen.

Matriks bujur sangkar pada aljabar linier maupun aljabar min-plus

berkaitan erat dengan nilai eigen dan vektor eigen. Rahayu et al. (2021) mengkaji masalah eigen dan eigenmode matriks atas aljabar min-plus. Selanjutnya, Maghribi et al. (2023) membahas masalah eigen melalui karakteristik *min-polynomial* dari suatu matriks atas aljabar min-plus. Rahmawati et al. (2024) mengembangkan pembahasan tersebut pada matriks segitiga atas aljabar interval min-plus, sedangkan Siswanto dan Maghribi (2025) mengkaji penyelesaian masalah eigen pada matriks segitiga dan diagonal tertentu atas aljabar min-plus. Kajian mengenai struktur matriks pada aljabar min-plus juga berkembang pada pembahasan aturan *Cramer*, invers matriks, dan aljabar interval min-plus sebagaimana ditunjukkan oleh Putri et al. (2024), Ariyanti et al. (2024), serta Siswanto dan Septiany (2025). Hal tersebut menunjukkan bahwa masalah eigen pada aljabar min-plus telah dikaji pada beberapa jenis matriks, tetapi masih berfokus pada penyelesaian matematis.

Permasalahan nilai eigen dalam struktur matriks aljabar min-plus dapat diaplikasikan dalam masalah penentuan rute terpendek. Permasalahan rute terpendek memiliki keterkaitan dengan berbagai sistem jaringan, termasuk sistem distribusi logistik pada industri pertahanan. Sudaryanto et al. (2020) menunjukkan bahwa sistem distribusi logistik militer menghadapi kendala berupa keterbatasan sarana angkut dan jarak distribusi yang dapat memicu

keterlambatan pengiriman. Permasalahan mobilitas pada medan operasi juga dipengaruhi oleh kondisi medan, tingkat risiko lintasan, dan kondisi jaringan jalan sebagaimana dibahas oleh Pokonieczny dan Dawid (2021), Weng (2023), Kim et al. (2024), serta Trofymchuk et al. (2025). Selain itu, Aldi et al. (2023) menegaskan pentingnya efektivitas distribusi senjata dan amunisi dalam mendukung kesiapan operasional. Oleh karena itu, diperlukan pendekatan matematis untuk mendukung penentuan rute distribusi yang lebih efisien.

Berdasarkan penelitian-penelitian terdahulu tersebut, kajian mengenai nilai eigen pada aljabar min-plus umumnya masih berfokus pada sifat matematis dan penyelesaian masalah eigen pada berbagai jenis matriks, sedangkan penelitian mengenai logistik pertahanan lebih banyak membahas kendala distribusi, mobilitas, dan pemilihan rute secara operasional. Kebaruan penelitian ini terletak pada pengkajian keberadaan nilai eigen dalam struktur matriks aljabar min-plus melalui bobot rata-rata minimum sirkuit elementer pada graf *precedence*, kemudian menghubungkannya dengan permasalahan rute terpendek pada sistem distribusi logistik industri pertahanan. Pendekatan tersebut diharapkan dapat memberikan dasar matematis bagi perencanaan rute distribusi yang lebih efisien dan mendukung upaya meminimalkan keterlambatan pengiriman logistik pertahanan.

Misalkan matriks bujur sangkar pada aljabar linier dinotasikan dengan M . Vektor tak nol $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ dapat dikatakan sebagai vektor eigen dari M jika $M\bar{x}$ merupakan kelipatan skalar dari $\bar{x}$, yaitu $M\bar{x} = \lambda\bar{x}$ untuk suatu

skalar λ . Perhitungan nilai eigen dari suatu matriks bujur sangkar M , dapat menggunakan persamaan $\det(\lambda I - M) = 0$ yang merupakan persamaan karakteristik matriks bujur sangkar M . Namun, pendekatan tersebut tidak dapat diterapkan secara langsung pada struktur matriks aljabar min-plus karena perbedaan struktur aljabarnya. Oleh karena itu, diperlukan pendekatan lain untuk menjelaskan keberadaan nilai eigen pada struktur matriks aljabar min-plus, salah satunya melalui representasi graf *precedence* dan bobot rata-rata minimum sirkuit elementer.

Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis keberadaan nilai eigen dalam struktur matriks aljabar min-plus dan menjelaskan relevansinya terhadap permasalahan rute terpendek pada sistem distribusi logistik industri pertahanan. Penelitian dibatasi pada kajian teoretis dengan pendekatan studi pustaka tanpa melibatkan data empiris lapangan. Penentuan keberadaan nilai eigen dilakukan dengan memanfaatkan graf *precedence* dari struktur matriks aljabar min-plus dengan asumsi bahwa bobot busur merupakan bilangan riil tidak negatif.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan metode studi pustaka melalui pengumpulan dan analisis berbagai literatur yang berkaitan dengan nilai eigen dan vektor eigen pada matriks atas aljabar min-plus, graf *precedence*, serta bobot rata-rata minimum sirkuit elementer. Analisis dilakukan dengan mengkaji hubungan antara struktur matriks atas aljabar min-plus dan graf *precedence*, menentukan bobot rata-rata minimum sirkuit elementer, serta menghubungkan hasil kajian tersebut dengan permasalahan rute terpendek

pada sistem distribusi logistik industri pertahanan.

HASIL PENELITIAN

Bagian ini membahas keberadaan nilai eigen dalam struktur matriks aljabar min-plus. Maghribi et al. (2023) menjelaskan bahwa struktur aljabar min-plus isomorfik dengan struktur aljabar max-plus, sehingga beberapa konsep dan teorema yang digunakan dalam analisis nilai eigen dapat disesuaikan dari kerangka teori aljabar max-plus. Untuk selanjutnya, struktur matriks bujur sangkar atas aljabar min-plus akan dinotasikan dengan $\mathbb{R}_{\min}^{n \times n}$. Terlebih dahulu disajikan definisi graf precedence dari matriks bujur sangkar atas aljabar min-plus yang mengacu pada Baccelli et al. (2001).

Definisi 1 Graf berarah berbobot yang memiliki titik sebanyak n dan busur (b, a) untuk $[M]_{ab} \neq \varepsilon$ dengan $a, b = 1, 2, \dots, n$ disebut dengan graf precedence $G(M)$ dari matriks $M \in \mathbb{R}_{\min}^{n \times n}$. Bobot busur (b, a) merupakan bilangan riil $[M]_{ab}$ yang kemudian dinotasikan dengan $w(b, a) = [M]_{ab}$.

Selanjutnya, diberikan teorema yang menjelaskan makna dari elemen pada $\mathbb{R}_{\min}^{n \times n}$ yang berkaitan dengan graf precedence dari matriks tersebut yang mengacu pada penelitian Subiono (2015).

Teorema 2 Untuk setiap $k \geq 1$ pada $M \in \mathbb{R}_{\min}^{n \times n}$ berlaku

$[M^k]_{ab} = \min\{|\rho|_w | \rho \in P(b, a; k)\}$, dengan $P(b, a; k)$ merupakan himpunan semua lintasan dari titik b ke titik a dengan panjang k pada graf precedence $G(M)$. $[M^k]_{ab} = \varepsilon$ jika $P(b, a; k)$ merupakan himpunan kosong.

Bukti. Pembuktian teorema ini menggunakan langkah induksi. Diberikan sebarang elemen (b, a) pada $\underline{n} \times \underline{n} = \{(b, a) | b, a \in \underline{n}\}$ dengan $\underline{n} = 1, 2, \dots, n$. Lintasan pada $P(b, a; k)$ untuk $k = 1$ hanya terdiri dari satu busur dengan bobot yang diberikan oleh $[M]_{ab}$. Jika $[M]_{ab} = \varepsilon$, maka tidak ada busur (b, a) di $G(M)$ dan $P(b, a; k) = \emptyset$. Berarti

$$\begin{aligned} [M^1]_{ab} &= \min\{|\rho|_w | \rho \in P(b, a; 1)\} \\ &= \min\{|(b, a)|_w\} \\ &= |(b, a)|_w \\ &= [M]_{ab}, \end{aligned}$$

kesimpulannya pernyataan benar untuk $k = 1$.

Asumsikan pernyataan benar untuk $k \neq 1$, kemudian akan ditunjukkan pernyataan benar untuk $k + 1$. Pada kasus $k + 1$, berarti diperoleh $\rho \in P(b, a; k + 1)$. Agar nilai $P(b, a; k + 1) \neq \emptyset$, harus terdapat minimal satu lintasan di $P(b, a; k + 1)$. Lintasan ρ dapat dibagi menjadi sublintasan sepanjang k dari titik b ke titik d , serta sublintasan berupa satu busur dari titik d ke titik a . Dalam bentuk simbol dapat ditulis menjadi

$$\rho = \hat{\rho}, (d, a) \text{ dengan } \hat{\rho} \in P(b, d; k).$$

Bobot minimum untuk setiap lintasan $P(b, a; k + 1)$ diperoleh dari

$$\min_{d \in \underline{n}} \{[M]_{ad} + \min\{|\hat{\rho}|_w | \hat{\rho} \in P(b, d; k)\}\}.$$

Karena pernyataan tersebut benar untuk suatu k , maka diperoleh bahwa

$$\min\{|\hat{\rho}|_w | \hat{\rho} \in P(b, d; k)\} = [M^k]_{db}.$$

Selanjutnya, bobot minimum dari suatu lintasan yang menghubungkan titik b ke titik a dengan panjang $k + 1$ adalah

$$\begin{aligned} \min_{d \in \underline{n}} \{[M]_{ad} + [M^k]_{db}\} &= \bigoplus_{d=1}^n \{[M]_{ad} \otimes [M^k]_{db}\} \\ &= [M \otimes M^k]_{ab} \\ &= [M^{(1+k)}]_{ab} \\ &= [M^{(k+1)}]_{ab}. \end{aligned}$$

Pada kasus $P(b, a; k + 1) = \emptyset$, berarti tidak terdapat lintasan sepanjang $k + 1$ yang menghubungkan titik b ke titik a .

Kondisi ini menyebabkan untuk setiap titik d , tidak terdapat lintasan sepanjang k dari titik b ke titik d atau tidak terdapat busur dari titik d ke titik a . Oleh karena itu, $P(j, i; k + 1) = \emptyset$ menyebabkan bahwa paling sedikit terdapat satu nilai dari $[M^k]_{ab}$ dan $[M]_{ad}$ sama dengan ε . Sehingga

$$[M^{(k+1)}]_{ab} = \varepsilon.$$

Dari uraian di atas dapat diambil kesimpulan bahwa $[M^k]_{ab}$ terbukti menyatakan bobot minimum dari suatu lintasan sepanjang k dari titik b ke titik a pada graf *precedence* $G(M)$. ■

Untuk selanjutnya, bobot minimum semua lintasan sepanjang k dari titik b ke titik a pada graf *precedence* $G(M)$ dinotasikan dengan $[M^k]_{ab}$. Berdasarkan Teorema 2, dapat didefinisikan suatu matriks M^+ dan M^* dari suatu matriks $M \in \mathbb{R}_{\min}^{n \times n}$ yang mengacu pada penelitian Farlow (2009) sebagai berikut:

Definisi 3 Didefinisikan matriks M^+ dan M^* dari suatu matriks $M \in \mathbb{R}_{\min}^{n \times n}$ seperti berikut

$$M^+ = M \oplus M^2 \oplus M^3 \oplus \dots$$

$$M^* = E_n \oplus M^+.$$

Selanjutnya, diberikan teorema yang menjelaskan hubungan antara matriks M^+ dan M^* pada Definisi 3.

Teorema 4 Nilai M^+ dari suatu matriks $M \in \mathbb{R}_{\min}^{n \times n}$ adalah $M^+ = M \otimes M^*$.

Bukti. Diperhatikan bahwa nilai $M^+ = M \oplus M^2 \oplus M^3 \oplus \dots$ dan $M^* = E_n \oplus M^+$. Oleh karena itu,

$$M^+ = M \oplus M^2 \oplus M^3 \oplus \dots$$

$$= M \otimes (E_n \oplus M \oplus M^2 \oplus \dots)$$

$$= M \otimes (E_n \oplus M^+)$$

$$= M \otimes M^*. \blacksquare$$

Teorema berikut ini mengacu pada penelitian Farlow (2009) yang akan menjelaskan hubungan antara matriks M^+ dengan matriks M^k , dengan

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ di mana n adalah ordo dari matriks $M \in \mathbb{R}_{\min}^{n \times n}$.

Teorema 5 Diberikan suatu matriks $M \in \mathbb{R}_{\min}^{n \times n}$. Jika setiap sirkuit di $G(M)$ mempunyai bobot sirkuit rata-rata lebih dari atau sama dengan 0, maka

$$M^+ = \bigoplus_{k=1}^n M^k$$

$$= M \oplus M^2 \oplus \dots \oplus M^n \in \mathbb{R}_{\min}^{n \times n}.$$

Bukti. Diperhatikan bahwa $M^+ = \bigoplus_{k=1}^n M^k = M \oplus M^2 \oplus \dots$

$$[M^+]_{ab} = \min\{[M^k]_{ab}, 1 \leq k < \infty\}$$

$$\geq \min\{[M^k]_{ab}, 1 \leq k \leq n\}.$$

Karena M merupakan matriks bujur sangkar, maka untuk setiap lintasan di $G(M)$ dari titik b ke titik a yang memiliki panjang lebih dari atau sama dengan n pasti akan ada paling tidak satu pengulangan titik. Dengan demikian, terbentuk setidaknya satu sirkuit dengan panjang tidak lebih dari n . Karena seluruh sirkuit pada $G(M)$ mempunyai bobot rata-rata lebih dari atau sama dengan 0, maka nilai minimum bobot rata-rata sirkuit adalah 0. Dengan demikian, bobot lintasan tidak akan bertambah ketika terjadi pengulangan titik, sehingga

$$M \oplus M^2 \oplus \dots \oplus M^n \geq M \oplus M^2 \oplus M^3 \oplus \dots$$

$$[M^+]_{ab} = \min\{[M^k]_{ab}, 1 \leq k < \infty\}$$

$$\leq \min\{[M^k]_{ab}, 1 \leq k \leq n\}.$$

Dari Persamaan di atas diperoleh

$$[M^+]_{ab} = \min\{[M^k]_{ab}, 1 \leq k \leq n\}.$$

Jadi, terbukti bahwa

$$M^+ = \bigoplus_{k=1}^n M^k$$

$$= M \oplus M^2 \oplus \dots \oplus M^n. \blacksquare$$

Berdasarkan Teorema 5 diketahui bahwa

$$M^+ = M \oplus M^2 \oplus \dots \oplus M^n$$

$$= M \otimes (E_n \oplus M \oplus M^2 \oplus \dots \oplus M^{n-1}).$$

Diketahui juga bahwa $M^+ = M \otimes M^*$ sehingga diperoleh

$$M^* = E_n \oplus M \oplus M^2 \oplus \dots \oplus M^{n-1}.$$

Pada bagian ini akan dibahas mengenai bobot rata-rata minimum sirkuit elementer dengan minimum diambil atas seluruh sirkuit elementer pada suatu graf, dalam hal ini adalah graf *precedence*, yang mengacu pada penelitian Baccelli et al. (2001). Misal diberikan matriks $M \in \mathbb{R}_{\min}^{n \times n}$ dengan graf *precedence* $G(M)$. Bobot minimum seluruh sirkuit sepanjang k pada graf *precedence* $G(M)$ dapat diperoleh melalui perhitungan $[M^k]_{aa}$. Nilai perhitungan $\bigoplus_{i=1}^n [M^k]_{aa}$ merupakan minimum dari bobot minimum seluruh sirkuit sepanjang k pada graf *precedence* $G(M)$. Diketahui bahwa $\bigoplus_{i=1}^n [M^k]_{aa}$ merupakan $\text{trace}(M^k)$, sehingga $\text{trace}(M^k)$ menyatakan bobot minimum sirkuit sepanjang k pada graf *precedence* $G(M)$. Oleh karena itu, rata-rata minimum dari bobot minimum seluruh sirkuit sepanjang k pada graf *precedence* $G(M)$ dapat diperoleh melalui perhitungan $\frac{1}{k} \text{trace}(M^k)$. Selanjutnya, jika diambil minimum dari perhitungan $\frac{1}{k} \text{trace}(M^k)$ pada sirkuit sepanjang $k \leq n$, yaitu pada seluruh sirkuit elementer, maka diperoleh

$$\bigoplus_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{k} \text{trace}(M^k) \right\}$$

yang menyatakan bobot rata-rata minimum sirkuit elementer pada graf *precedence* $G(M)$. Untuk selanjutnya, perhitungan dari $\bigoplus_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{k} \text{trace}(M^k) \right\}$ dinotasikan dengan $\lambda_{\min}(M)$ atau

$$\lambda_{\min}(M) = \bigoplus_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{k} \text{trace}(M^k) \right\}.$$

Selanjutnya, diberikan beberapa definisi yang berkaitan dengan sirkuit elementer pada graf *precedence* $G(A)$ yang memiliki bobot rata-rata minimum yang mengacu pada penelitian Farlow (2009).

Definisi 6 Diberikan suatu matriks $M \in \mathbb{R}_{\min}^{n \times n}$ dan himpunan seluruh sirkuit elementer pada graf *precedence* $G(M)$ yang dinotasikan dengan $C(M)$. Suatu sirkuit $\rho \in C(M)$ yang bobot rata-ratanya sama dengan bobot rata-rata minimum sirkuit elementer pada graf *precedence* $G(M)$ disebut sirkuit kritis.

Definisi 7 Diberikan suatu matriks $M \in \mathbb{R}_{\min}^{n \times n}$, graf kritis didefinisikan sebagai graf yang terdiri atas titik-titik dan busur-busur sirkuit pada graf *precedence* $G(M)$. Graf kritis dari matriks M dinotasikan dengan $G^c(M)$ dan $V^c(M)$ adalah notasi dari himpunan titik-titik pada $G^c(M)$.

Sebelum melakukan pembahasan tentang keberadaan nilai eigen dalam struktur matriks aljabar min-plus, terlebih dahulu diberikan definisi nilai eigen dalam struktur matriks aljabar min-plus yang mengacu pada penelitian Farlow (2009).

Definisi 8 Diberikan suatu matriks $M \in \mathbb{R}_{\min}^{n \times n}$. Jika $\bar{v} \in \mathbb{R}_{\min}^n$ adalah sebuah vektor dengan $\bar{v} \neq \bar{\epsilon}$ dan $\mu \in \mathbb{R}_{\min}$ adalah sebuah skalar yang memenuhi

$$M \otimes \bar{v} = \mu \otimes \bar{v},$$

maka μ adalah nilai eigen dari matriks M dan $\bar{v}$ merupakan vektor eigen dari matriks M yang bersesuaian dengan μ .

Selanjutnya, diberikan teorema yang menjelaskan keberadaan nilai eigen dalam struktur matriks aljabar min-plus.

Teorema 9 Diberikan suatu matriks $M \in \mathbb{R}_{\min}^{n \times n}$. Nilai eigen matriks M adalah suatu skalar $\lambda_{\min}(M)$, yaitu bobot rata-rata minimum sirkuit elementer pada graf *precedence* $G(M)$.

Bukti. Diketahui bahwa nilai $\lambda_{\min}(M) = \bigoplus_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{k} \text{trace}(M^k) \right\}$.

Selanjutnya, diberikan definisi matriks $L = -\lambda_{\min}(M) \otimes M$. Oleh karena itu,

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(L) &= \bigoplus_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{k} \text{trace}(L^k) \right\} \\ &= \bigoplus_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{k} \text{trace}((- \lambda_{\min}(M) \otimes M)^k) \right\} \\ &= \bigoplus_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{k} \text{trace}((- \lambda_{\min}(M))^k \otimes M^k) \right\} \\ &= \bigoplus_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{k} \text{trace}((- \lambda_{\min}(M))^k \otimes \begin{bmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix}) \right\} \\ &= \bigoplus_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{k} \text{trace} \left(\begin{bmatrix} (- \lambda_{\min}(M))^k \otimes m_{11} & \dots & (- \lambda_{\min}(M))^k \otimes m_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (- \lambda_{\min}(M))^k \otimes m_{n1} & \dots & (- \lambda_{\min}(M))^k \otimes m_{nn} \end{bmatrix} \right) \right\} \\ &= \bigoplus_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{k} ((- \lambda_{\min}(M))^k \otimes m_{11}) \oplus \dots \oplus ((- \lambda_{\min}(M))^k \otimes m_{nn}) \right\} \\ &= \bigoplus_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{k} ((- \lambda_{\min}(M))^k \otimes (m_{11} \oplus \dots \oplus m_{nn})) \right\} \\ &= \bigoplus_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{k} (- \lambda_{\min}(M))^k \otimes \frac{1}{k} \text{trace}(M)^k \right\} \\ &= \bigoplus_{k=1}^n \{ - \lambda_{\min}(M) \otimes \lambda_{\min}(M) \} \\ &= \bigoplus_{k=1}^n \{ - \lambda_{\min}(M) + \lambda_{\min}(M) \} \\ &= \bigoplus_{k=1}^n 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Hasil perhitungan $\lambda_{\min}(L)$ menunjukkan bahwa tidak terdapat sirkuit dengan bobot negatif pada graf *precedence* $G(L)$. Berdasarkan Teorema 5, diperoleh suatu matriks $M^+ = M \oplus M^2 \oplus \dots \oplus M^n$ dan $M^* = E_n \oplus M \oplus M^2 \oplus \dots \oplus M^{n-1}$. Karena nilai $\lambda_{\min}(L) = 0$, maka terdapat suatu $k \in \mathbb{N}$ dengan $k \leq n$ dan $c \in \{1, 2, \dots, n\}$ sehingga $(L^k)_{cc} = 0$. Karena $(L^k)_{cc} = 0$, maka sirkuit elementer sepanjang k pada graf *precedence* $G(L)$ dengan titik awal s ke titik akhir s adalah sirkuit kritis. Dapat diambil kesimpulan bahwa nilai $(E_n)_{ss} = 0$. Selanjutnya, berdasarkan Definisi 3 diketahui bahwa

$$\begin{aligned} L^+ &= L \otimes L^* \\ L^* &= E_n \oplus L^+, \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned} (L^*)_{ac} &= (E_n \oplus L^+)_{ac} \\ &= \begin{cases} \mathcal{E} \oplus (L^+)_{ac} = (L^+)_{ac}, & a \neq c, \\ 0 \oplus (L^+)_{ac}, & a = c. \end{cases} \end{aligned}$$

Jika elemen kolom ke- c matriks L^+ dan elemen kolom ke- c matriks L^*

dinotasikan dengan $(L^+)_{.c}$ dan $(L^*)_{.c}$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} (L^+)_{.c} &= (L^*)_{.c} \\ L \otimes (L^*)_{.c} &= (L^*)_{.c} \\ -\lambda_{\min}(M) \otimes M \otimes (L^*)_{.c} &= (L^*)_{.c} \\ M \otimes (L^*)_{.c} &= \lambda_{\min}(M) \otimes (L^*)_{.c}. \end{aligned}$$

Dengan demikian, $\lambda_{\min}(M)$ yang merepresentasikan bobot rata-rata minimum sirkuit elementer pada graf *precedence* $G(M)$ adalah nilai eigen pada struktur matriks M aljabar min-plus. Selanjutnya, $(L^*)_{.c}$ merupakan vektor eigen dari matriks M atas aljabar min-plus yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_{\min}(M)$. ■

Teorema 9 menjamin keberadaan nilai eigen dalam struktur matriks aljabar min-plus karena nilai $\lambda_{\min}(M)$ selalu ada dan dapat ditentukan. Selain itu, berdasarkan Teorema 9 dapat diperoleh langkah-langkah untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen pada struktur matriks aljabar min-plus. Jika diberikan matriks $M \in \mathbb{R}_{\min}^{n \times n}$, maka langkah-langkah tersebut adalah sebagai berikut:

1. Menentukan matriks M^k dengan $1 \leq k \leq n$.
2. Menentukan nilai eigen dengan menggunakan rumus berikut ini $\lambda_{\min}(M) = \bigoplus_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{k} \text{trace}(M^k) \right\}$.
3. Menentukan sirkuit (c, c) dengan $1 \leq c \leq n$ yang merupakan sirkuit kritis dari graf *precedence* $G(M)$.
4. Menentukan suatu matriks $L = -\lambda_{\min}(M) \otimes M$ dan matriks $L^* = E_n + L^+$ dengan matriks $L^+ = L \oplus L^2 \oplus \dots \oplus L^n$.
5. Menentukan vektor eigen dari matriks M yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_{\min}(M)$, yaitu kolom ke- c dari matriks L^* .

PEMBAHASAN

Hasil penelitian menunjukkan bahwa nilai eigen dalam struktur matriks aljabar min-plus selalu ada dan dapat ditentukan melalui bobot rata-rata minimum sirkuit elementer pada graf *precedence*. Rahayu et al. (2021) dan Maghribi et al. (2023) juga membahas penentuan nilai eigen pada matriks atas aljabar min-plus berdasarkan struktur dan sifat matriks yang digunakan. Selain berkaitan dengan masalah eigen, operasi aljabar min-plus juga dapat digunakan untuk merepresentasikan dan menganalisis sistem jaringan transportasi (Farhi, 2023). Hal tersebut menunjukkan bahwa kajian nilai eigen dalam struktur matriks atas aljabar min-plus tidak hanya memiliki makna teoretis, tetapi juga dapat menjadi dasar matematis untuk menganalisis bobot minimum dan waktu siklus pada suatu jaringan.

Permasalahan rute terpendek berkaitan erat dengan distribusi logistik militer yang menuntut pengiriman munisi, bahan bakar, dan perlengkapan lainnya secara cepat dan tepat waktu. Sudaryanto et al. (2020) menunjukkan bahwa distribusi logistik militer menghadapi kendala berupa keterbatasan sarana angkut dan jarak distribusi yang dapat menyebabkan keterlambatan pengiriman. Selain itu, Aldi et al. (2023) menegaskan pentingnya efektivitas distribusi senjata dan amunisi dalam mendukung kesiapan operasional. Jalur distribusi tersebut dapat direpresentasikan dalam bentuk graf, dengan titik yang menggambarkan lokasi distribusi dan busur yang menggambarkan hubungan antarlokasi beserta bobot berupa jarak, waktu tempuh, biaya, atau tingkat risiko. Melalui representasi tersebut, aljabar min-plus dapat digunakan sebagai pendekatan matematis untuk

menganalisis bobot minimum dan mendukung penentuan rute distribusi yang lebih efisien. Dengan demikian, nilai eigen dalam struktur matriks atas aljabar min-plus berpotensi menjadi dasar matematis dalam analisis waktu siklus dan perencanaan distribusi logistik pertahanan sebagai upaya meminimalkan risiko keterlambatan.

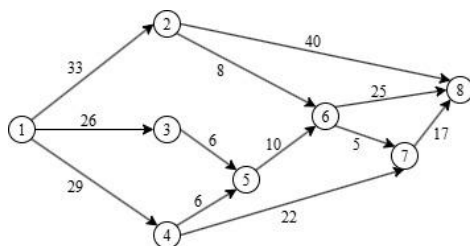
Nilai eigen tidak hanya bermakna sebagai bobot rata-rata minimum sirkuit elementer, tetapi juga dapat merepresentasikan waktu siklus minimum pada sistem yang memiliki keterkaitan antarproses. Farhi (2023) menunjukkan bahwa aljabar min-plus dapat digunakan untuk merepresentasikan sistem jaringan transportasi yang memiliki hubungan waktu dan ketergantungan antarkomponen. Pendekatan max-plus juga telah digunakan untuk menganalisis sistem kejadian diskrit, sinkronisasi, penjadwalan produksi, dan jaringan antrean sebagaimana dibahas oleh De Schutter et al. (2020), Permana et al. (2020), serta Rudhito dan Putra (2025). Karakteristik tersebut relevan dengan sistem distribusi logistik pertahanan yang melibatkan koordinasi antarpos distribusi, waktu tempuh, serta urutan kegiatan yang saling bergantung. Oleh karena itu, nilai eigen dapat digunakan sebagai dasar matematis untuk menganalisis waktu siklus dan mengidentifikasi bagian sistem yang berpotensi menimbulkan keterlambatan.

Dalam operasi bantuan kemanusiaan atau operasi tempur, rute pergerakan pasukan sering kali melalui medan dengan hambatan berbeda-beda, seperti jalan rusak, jembatan patah, atau area berisiko tinggi. Hal tersebut telah dibahas pada penelitian Pokonieczny dan Dawid (2021), Weng (2023), serta

Trofymchuk et al. (2025). Dengan menambahkan variabel tingkat risiko medan pada bobot lintasan, perhitungan nilai eigen dalam struktur matriks atas aljabar min-plus dapat digunakan untuk menganalisis jalur dengan waktu minimum yang tetap mempertimbangkan faktor keamanan. Pendekatan ini sejalan dengan prinsip *terrain-aware path optimization*, yaitu optimasi rute yang mempertimbangkan kondisi medan dan bobot dinamis pada jaringan lintasan seperti pada penelitian Kim et al. (2024).

Operasi pada struktur matriks atas aljabar min-plus memungkinkan analisis bobot minimum lintasan dalam satu kerangka operasi matriks. Farhi (2023) menjelaskan bahwa aljabar min-plus dapat digunakan untuk merepresentasikan dinamika jaringan transportasi yang memiliki ketergantungan waktu antarkomponen, sedangkan Rahayu et al. (2021) menunjukkan bahwa masalah eigen dan eigenmode pada matriks atas aljabar min-plus dapat digunakan untuk mengkaji perilaku sistem berdasarkan struktur matriks yang digunakan.

Untuk menggambarkan aplikasi nilai eigen dalam penentuan rute terpendek, berikut diberikan contoh graf jaringan distribusi. Setiap titik pada graf menggambarkan lokasi logistik, sedangkan busur antar titik menunjukkan lintasan dengan bobot berupa jarak antarpas. Jarak tempuh dinyatakan dalam satuan *km*.



Gambar 1. Visualisasi Jaringan Distribusi Logistik

Titik 1 merupakan titik awal dan titik 8 merupakan titik tujuan. Jika titik pada graf tidak terhubung, maka elemen matriks adalah ε di mana $\varepsilon = \infty$. Matriks yang merepresentasikan graf pada Gambar 1 adalah sebagai berikut:

$$M = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 33 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 26 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 29 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 6 & 6 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 8 & \varepsilon & \varepsilon & 10 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 22 & \varepsilon & 5 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 40 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 25 & 17 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

Perhitungan rute terpendek dilakukan dengan bantuan *software* Matlab karena operasi matriks atas aljabar min-plus cukup kompleks jika dikerjakan secara manual. *Syntax* Matlab yang digunakan adalah sebagai berikut:

```
%perhitungan rute terpendek
menggunakan aljabar min-plus
clc;
clear;
M = input('Masukkan matriks M = ');
[m,n] = size(M);
if m ~= n
    error('Matriks harus persegi');
end
E = inf(m,n);
E(1:m+1:end) = 0;
% Mencari nilai xe
be = inf(1,n);
be(1) = 0;
bet = transpose(be);
Mb = E;
for a=1:n-1
    Mb = penjumlahanMinPlus(Mb, perpankatanMinPlus(M,a));
end
xe = perkalianMinPlus(Mb, bet);
% Mencari nilai x1
Mt = transpose(M);
Mtb = E;
for a=1:n-1
    Mtb = penjumlahanMinPlus(Mtb, perpankatanMinPlus(Mt,a));
end
```

```

end
b1 = inf(1,n);
b1(n) = -xe(n);
b1t=transpose(b1);
x1=-(perkalianMinPlus(Mtb,b1t));
%membandingkan nilai xe dan nilai
x1
jarak=0;
disp('diperoleh lintasan rute
terpendek adalah sebagai
berikut');
p=1;
for a=2:n
    if xe(a)==x1(a)
        fprintf('%d,%d',p,a);
        if a < n
            fprintf(', ');
        end
        if a<=p
            jarak=jarak+M(p,a);
        else
            jarak=jarak+M(a,p);
        end
        p=a;
    end
end
fprintf('\ndengan total rute
terpendek adalah = %d\n', jarak);
%fungsi penjumlahan struktur
matriks aljabar min-plus
function
Mm=penjumlahanMinPlus(M,L)
    if isequal(size(M),size(L))
        Mm = min(M,L);
    else
        disp('ordo matriks
berbeda');
    end
end
%fungsi perkalian struktur matriks
aljabar min-plus
function h=perkalianMinPlus(M,L)
[m,n]=size(M);
[~,r]=size(L);
    for a=1:m
        for b=1:r
            h(a,b)=inf;
            for l=1:n
                h(a,b)=min(h(a,b),M(a,l)+L(l,b));
            end
        end
    end
end
end

```

%fungsi perpangkatan struktur
matriks aljabar min-plus

```

function
Mp=perpangkatanMinPlus(M,n)
    Mp=M;
    for k = 2:n
        Mp =
        perkalianMinPlus(Mp,M);
    end
end

```

Hasil perhitungan menggunakan *software* Matlab menunjukkan bahwa rute terpendek dari titik 1 menuju titik 8 adalah (1,2),(2,6),(6,7), dan (7,8) dengan total jarak adalah 63 km. Hasil ini menunjukkan bahwa aljabar min-plus dapat digunakan untuk menentukan bobot minimum lintasan pada suatu jaringan, sejalan dengan Farhi (2023).

SIMPULAN

Nilai eigen dalam struktur matriks aljabar min-plus selalu ada dan dapat ditentukan melalui bobot rata-rata minimum sirkuit elementer pada graf *precedence* $G(M)$. Keberadaan nilai eigen tersebut menunjukkan bahwa struktur matriks aljabar min-plus memiliki dasar matematis untuk menganalisis lintasan, bobot minimum, dan waktu siklus minimum. Pada industri pertahanan, konsep ini relevan untuk mendukung perencanaan rute terpendek pada sistem distribusi logistik agar proses pengiriman lebih efisien dan risiko keterlambatan dapat diminimalkan. Penelitian selanjutnya disarankan untuk mengaplikasikan model ini pada data empiris distribusi logistik pertahanan agar hasil kajian teoretis dapat diuji dalam kondisi operasional nyata.

DAFTAR PUSTAKA

Aldi, I. A., Ichsan, R., & Adiwinata, A. (2023, Agustus 31). Distribusi

- Pengadaan Senjata dan Amunisi Badan Pembekalan TNI. *Jurnal TNI Angkatan Udara*, 2(3), 1-9. doi:<https://doi.org/10.62828/jpb.v2i3.73>
- Ariyanti, G., Sari, A. E., & Manurung, C. (2024). Notes on matrix inverse over min-plus algebra. *Edelweiss Applied Science and Technology*, 8(6), 9544-9554. doi:10.55214/25768484.v8i6.4034
- Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G. J., & Quadrat, J. P. (2001). *Synchronization and Linearity : An Algebra for Discrete Event Systems*. Paris: Wiley.
- De Schutter, B., Boom, T. v., Xu, J., & Farahani, S. S. (2020). Analysis and control of max-plus linear discrete-event systems: An introduction. *Discrete Event Dynamic Systems*, 30, 25-54. doi:<https://doi.org/10.1007/s10626-019-00294-w>
- Farhi, N. (2023). A Min-Plus Algebra System Theory for Traffic Networks. *Mathematics*, 11(19), 1-23. doi:<https://doi.org/10.3390/math11194028>
- Farlow, K. G. (2009). *Max-Plus Algebra*. Blacksburg: Virginia Polytechnic Institute and State University.
- Kim, H., Yang, T., Lee, C. M., Son, H., & Yoon, S. E. (2024). Analysis of Terrain-Aware Optimal Path Planning Methods for Stable Off-Road Navigation. *Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE)*, 206-210. doi:10.1109/IV55156.2024.10588444
- Maghribi, S. M., Siswanto, & Sutrima. (2023). Characteristic Min-Polynomial and Eigen Problem of a Matrix over Min-Plus Algebra. *JTAM (Jurnal Teori dan Aplikasi Matematika)*, 7(4), 1108-1117. doi:<https://doi.org/10.31764/jtam.v7i4.16498>
- Permana, A., Siswanto, S., & Pangadi, P. (2020). Eigen Problem Over Max-Plus Algebra on Determination of the T3 Brand Shuttlecock Production Schedule. *Numerical: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*, 4(1), 23-31. doi:<https://doi.org/10.25217/numerical.v4i1.702>
- Pokonieczny, K., & Dawid, W. (2021). Methodology of Using Terrain Passability Maps for Planning the Movement of Troops and Navigation of Unmanned Ground Vehicles. *GIS Ostrava 2021 - Advances in Localization and Navigation*, 21(14). doi:<https://doi.org/10.31490/9788024845050-12>
- Putri, Z. N., Siswanto, S., & Kurniawan, V. Y. (2024). Cramer's Rule In Min-Plus Algebra. *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, 18(2), 1147-1154. doi:<https://doi.org/10.30598/barekengvol18iss2pp1147-1154>
- Rahayu, E. W., Siswanto, & Wiyono, S. B. (2021, Desember). Masalah Eigen dan Eigenmode Matriks atas Aljabar Min-Plus. *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, 15(4), 659-666. doi:<https://doi.org/10.30598/barekengvol15iss4pp659-666>
- Rahmawati, A. D., Siswanto, & Wibowo, S. (2024).

- Characteristic Polynomial and Eigenproblem of Triangular Matrix over Interval Min-Plus Algebra. *JTAM (Jurnal Teori dan Aplikasi Matematika)*, 8(3), 680-690.
doi:<https://doi.org/10.31764/jtam.v8i3.22305>
- Rudhito, M. A., & Putra, D. P. (2025). Analysis of Three Servers Closed Series Queuing Network with Delay Time Using Max-Plus Algebra. *BAREKENG: Journal of Mathematics and Its Applications*, 19(3), 1513-1524.
doi:<https://doi.org/10.30598/barekengvol19iss3pp1513-1524>
- Siswanto, & Gusmizain, A. (2024). Determining the Inverse of a Matrix over Min-Plus Algebra. *JTAM (Jurnal Teori dan Aplikasi Matematika)*, 8(1), 244-255.
doi:<https://doi.org/10.31764/jtam.v8i1.17432>
- Siswanto, & Maghribi, S. M. (2025). Solving the eigenproblems of triangular and diagonal strictly double $\mathbb{R}$ -astic matrices over min-plus algebra. *Journal of Discrete Mathematical Sciences & Cryptography*, 28(6), 2237-2245. doi:[10.47974/JDMSC-2188](https://doi.org/10.47974/JDMSC-2188)
- Siswanto, S., & Septiany, A. S. (2025). Cramer's Rule In Interval Min-Plus Algebra. *BAREKENG: Journal of Mathematics and Its Applications*, 19(1), 0571-0580.
doi:<https://doi.org/10.30598/barekengvol19iss1pp0571-0580>
- Subiono. (2015). *Aljabar Min-Max Plus dan Terapannya, ver. 3.0.0*. Surabaya: Jurusan Matematika ITS.
- Sudaryanto, H., Suhirwan, & Warka, I. W. (2020). Strategi Sistem Distribusi pada Pengiriman Logistik Bekal Kelas V TNI Angkatan Laut ke Wilayah Kerja Komando Armada I. *Jurnal Strategi Perang Semesta*, 6(2), 179-207.
doi:<https://garuda.kemdiktisaintek.go.id/documents/detail/2816012>
- Trofymchuk, O., Vishnyakov, V., Sheviakina, N., Klymenko, V., & Zahorodnia, S. (2025). Geoinformation terrain analysis for optimizing military equipment routes. *International Multidisciplinary Scientific GeoConference (SGEM)*, 24, 221-228.
doi:[10.5593/sgem2024v/3.2/s12.281](https://doi.org/10.5593/sgem2024v/3.2/s12.281)
- Weng, Z. (2023). Route Optimization as an Aspect of Humanitarian Logistics: Delineating Existing Literature from 2011 to 2022. *Lecture notes in mechanical engineering*, 647-661.
doi:[10.1007/978-981-99-1665-8_54](https://doi.org/10.1007/978-981-99-1665-8_54)