Jurnal Pendidikan Matematika: Judika Education
Volume 9, Nomor 5, September-Oktober 2026
e-ISSN : 2614-6088
p-ISSN : 2620-732X
DOI : https://doi.org/10.31539/h4hrgq15

# PEMODELAN NUMERIK DAN VALIDASI KUANTITATIF PERSAMAAN DIFERENSIAL NONLINIER UNTUK SISTEM ALIRAN AIR BERKELANJUTAN

**Binti Karomah[1], Ferdinand Hasudungan Siagian[2],**
**A. Eka Hermia Fitrianingsy[3]**
Universitas Surakarta[1]
Universitas Pertahanan Republik Indonesia[2]
Institut Teknologi dan Kesehatan Tri Tunas Nasional[3]
bintikaromah@gmail.com[1]

## ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan membangun model persamaan diferensial nonlinier berbasis neraca massa untuk merepresentasikan hubungan antara debit masuk, penyimpanan, debit keluar, dan kehilangan air serta mengevaluasi ketepatan solusi numeriknya. Metode yang digunakan adalah simulasi kuantitatif dengan data sintetis terkontrol yang menggunakan Daerah Aliran Sungai (DAS) Bengawan Solo sebagai konteks penerapan model. Dataset terdiri atas 30 pengamatan selama 174 jam dengan interval enam jam. Persamaan diferensial diselesaikan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat (RK4) dengan langkah waktu 0,25 jam. Validasi dilakukan terhadap tinggi muka air dan debit keluar menggunakan RMSE, MAE, MAPE, koefisien determinasi ($R^2$), *Nash-Sutcliffe Efficiency* (NSE), *Kling-Gupta Efficiency* (KGE), uji Shapiro-Wilk, dan uji t berpasangan. Hasil penelitian menunjukkan bahwa simulasi mampu mengikuti pola observasi semu dengan kesalahan yang rendah. RMSE tinggi muka air sebesar 0,0091 m, sedangkan RMSE debit sebesar 0,5815 $m^3$/jam. Nilai $R^2$, NSE, dan KGE masing-masing mencapai 0,9976; 0,9976; dan 0,9962 untuk tinggi muka air serta 0,9952; 0,9949; dan 0,9866 untuk debit keluar. MAPE debit sebesar 1,64%, sementara uji t berpasangan menunjukkan tidak terdapat perbedaan rata-rata yang signifikan antara simulasi dan observasi semu. Sistem mampu memenuhi ambang debit minimal 20 $m^3$/jam pada 90% periode. Simpulan penelitian menunjukkan bahwa kombinasi model neraca massa nonlinier, RK4, validasi multiindikator, dan indikator reliabilitas dapat menjadi kerangka kuantitatif yang transparan untuk pengujian awal sistem aliran air, dengan catatan bahwa hasil berbasis data sintetis belum dapat digunakan untuk menyimpulkan kondisi hidrologis aktual DAS Bengawan Solo.

**Kata kunci:** Persamaan Diferensial Nonlinier; Runge-Kutta Orde Empat; Pemodelan Aliran Air; Validasi Kuantitatif; Keberlanjutan; DAS Bengawan Solo

## *ABSTRACT*

*This study aims to construct a nonlinear differential equation model based on mass balance to represent the relationships among inflow, storage, outflow, and*

*water loss and to evaluate the accuracy of its numerical solution. The method employed a quantitative simulation using controlled synthetic data, with the Bengawan Solo Watershed serving as the contextual setting for model implementation. The dataset consisted of 30 observations over 174 hours at six-hour intervals. The differential equation was solved using the fourth-order Runge-Kutta (RK4) method with a 0.25-hour time step. Validation was conducted for water level and outflow discharge using RMSE, MAE, MAPE, coefficient of determination ($R^2$), Nash-Sutcliffe Efficiency (NSE), Kling-Gupta Efficiency (KGE), Shapiro-Wilk test, and paired t-test. The results show that the simulation reproduced the pseudo-observation patterns with low errors. The RMSE was 0.0091 m for water level and 0.5815 $m^3/h$ for discharge. The $R^2$, NSE, and KGE values reached 0.9976, 0.9976, and 0.9962 for water level and 0.9952, 0.9949, and 0.9866 for discharge, respectively. Discharge MAPE was 1.64%, while the paired t-test indicated no significant mean difference between the simulation and pseudo-observations. The system maintained a minimum discharge of 20 $m^3/h$ for 90% of the observation periods. The study concludes that the combination of a nonlinear mass-balance model, RK4, multi-metric validation, and reliability assessment provides a transparent quantitative framework for preliminary testing of water-flow systems, while field validation remains necessary because the present results are based on synthetic data.*

***Keywords:*** *Nonlinear Differential Equations; Fourth-Order Runge-Kutta; Water Flow Modeling; Quantitative Validation; Sustainability; Bengawan Solo Watershed*

## PENDAHULUAN

Ketersediaan air yang stabil merupakan salah satu prasyarat bagi keberlanjutan permukiman, pertanian, industri, dan ekosistem. Variabilitas curah hujan, perubahan penggunaan lahan, peningkatan kebutuhan air, dan perubahan iklim membuat hubungan antara pasokan dan kebutuhan semakin sulit diprediksi. Dalam konteks tersebut, pengelolaan sumber daya air membutuhkan pendekatan yang tidak hanya mampu menggambarkan keadaan rata-rata, tetapi juga mampu mengikuti perubahan sistem dari waktu ke waktu. Model hidrologi dan model sumber daya air semakin banyak digunakan untuk membantu memahami proses, menguji skenario, serta menyediakan dasar kuantitatif bagi pengambilan keputusan.

Herrera (2022) menekankan bahwa model hidrologi digunakan untuk berbagai kebutuhan pengambilan keputusan, sedangkan Waheed et al. (2023) menunjukkan bahwa penilaian ketahanan sistem air perlu mempertimbangkan perubahan dan ketidakpastian kondisi hidroklimat.

Model matematika memberikan cara yang relatif transparan untuk menghubungkan variabel input dan respons sistem. Pada sistem penyimpanan air sederhana, debit masuk akan memengaruhi volume tersimpan, sementara debit keluar dan kehilangan air mengurangi penyimpanan. Hubungan tersebut tidak selalu linear karena perubahan tinggi muka air dapat menghasilkan perubahan debit yang tidak proporsional. Pendekatan reservoir

nonlinier telah digunakan untuk merepresentasikan transformasi hujan-limpasan dan menunjukkan bahwa formulasi nonlinear dapat menjadi alternatif yang berguna dalam simulasi sistem aliran (Giudicianni et al., 2023). Penggunaan model konseptual yang sederhana juga memungkinkan setiap parameter ditafsirkan secara fisik dan selanjutnya dikalibrasi ketika data lapangan tersedia.

Dinamika nonlinier menjadi penting ketika respons sistem bergantung pada kondisi penyimpanan. Pada penelitian ini, debit keluar dirumuskan sebagai fungsi pangkat tinggi muka air, sedangkan kehilangan air menggunakan fungsi saturasi. Struktur tersebut memungkinkan debit keluar meningkat lebih cepat ketika tinggi muka air bertambah dan pada saat yang sama membatasi kehilangan agar tidak meningkat tanpa batas. Pendekatan semacam ini sejalan dengan perkembangan pemodelan hidrologi yang semakin menekankan pentingnya representasi proses dan struktur model, bukan hanya kemampuan memperoleh nilai indikator kinerja yang tinggi (Thirel et al., 2024). Model sederhana tidak dimaksudkan menggantikan sistem hidrologis yang kompleks, tetapi menjadi kerangka terkontrol untuk menguji hubungan matematis dan prosedur validasi.

Persamaan diferensial biasa diperlukan ketika perubahan penyimpanan dipandang sebagai fungsi waktu. Karena persamaan diferensial nonlinier pada umumnya sulit diselesaikan secara analitik untuk input yang berubah terhadap waktu, penyelesaian numerik menjadi bagian penting dari pemodelan. Metode Runge-Kutta orde empat dipilih dalam penelitian ini karena dapat memberikan pendekatan numerik dengan ketelitian tinggi tanpa memerlukan turunan tingkat tinggi secara eksplisit. Penggunaan penyelesaian numerik dalam model hidrologi memungkinkan sistem diuji secara berulang pada interval waktu yang teratur dan memudahkan reproduksi hasil ketika parameter, kondisi awal, atau skenario input diubah. Herrera (2022) menempatkan estimasi parameter dan analisis ketidakpastian sebagai bagian penting dalam pengembangan model hidrologi yang dapat dipercaya.

Selain formulasi model, validasi merupakan tahap penting karena model dengan kurva yang tampak serupa belum tentu memiliki karakter kesalahan yang sama. Penggunaan satu ukuran kinerja dapat menutupi jenis kesalahan tertentu. Clark et al. (2021) menunjukkan bahwa metrik populer dalam pemodelan hidrologi dapat menghasilkan interpretasi yang berbeda dan memiliki ketidakpastian pengambilan sampel. Cinkus et al. (2023) juga menunjukkan bahwa NSE dan KGE dapat dipengaruhi oleh kesalahan yang saling mengimbangi. Oleh karena itu, penelitian ini menggunakan beberapa indikator yang mewakili kesalahan absolut, kesalahan relatif, kesesuaian pola, efisiensi, bias, dan perbedaan rata-rata. Pendekatan multiindikator juga konsisten dengan praktik evaluasi model yang menggunakan RMSE, NSE, KGE, dan ukuran lain secara bersamaan untuk memperoleh gambaran performa yang lebih lengkap (Gauch, 2023; Huang & Merwade, 2024).

Ketidakpastian data juga perlu diperhatikan ketika menilai ketepatan model. Dalam penelitian lapangan, data debit dapat mengandung ketidakpastian

pengukuran, sedangkan hasil model dapat dipengaruhi oleh ketidakpastian struktur, parameter, dan input. Oliveira dan Vrugt (2022) menunjukkan bahwa catatan debit dapat direpresentasikan sebagai data yang memiliki ketidakpastian, sementara Aerts et al. (2024) menegaskan bahwa ketidakpastian observasi debit perlu dipertimbangkan ketika menginterpretasikan kinerja model. Pada penelitian ini, persoalan tersebut dikendalikan melalui penggunaan pseudo-observation yang dibentuk di sekitar solusi model. Dengan demikian, fokus penelitian diarahkan pada pengujian prosedur numerik dan validasi, bukan pada klaim bahwa data yang digunakan merupakan pengukuran hidrologis aktual.

Penelitian terdahulu telah mengembangkan berbagai pendekatan untuk kalibrasi, evaluasi, dan ketidakpastian model aliran. Dal Molin et al. (2023) menunjukkan bahwa kalibrasi berbasis karakteristik aliran dapat digunakan untuk menangani prediksi pada DAS tanpa pengukuran langsung, tetapi ketidakpastian tetap menjadi isu penting. Hernandez-Suarez & Nejadhashemi (2022) menunjukkan bahwa kalibrasi multiobjektif dan estimasi Bayesian dapat memengaruhi ketidakpastian prediksi indeks hidrologis. Gaur (2022) menekankan pentingnya evaluasi pola spasial dan ketidakpastian pada model hidrologi terdistribusi. Penelitian lain juga menunjukkan bahwa pemilihan metrik perlu disesuaikan dengan tujuan evaluasi dan karakter data (Liu, 2020; Lee & Choi, 2022). Temuan tersebut menunjukkan bahwa evaluasi model tidak cukup hanya berdasarkan satu ukuran kesesuaian.

Kebaruan penelitian ini terletak pada penggabungan empat komponen dalam satu kerangka yang terkontrol dan mudah direplikasi, yaitu formulasi persamaan diferensial nonlinier berbasis neraca massa, penyelesaian RK4 dengan langkah waktu lebih kecil daripada interval observasi, validasi multiindikator terhadap tinggi muka air dan debit keluar, serta evaluasi reliabilitas terhadap ambang layanan debit. Berbeda dari penelitian yang berfokus pada model hidrologi kompleks, kalibrasi berbasis data lapangan, atau pengembangan metrik baru, penelitian ini sengaja menggunakan data sintetis untuk mengisolasi dan menguji konsistensi numerik model. Kerangka ini dapat menjadi tahap metodologis awal sebelum model diterapkan pada data sensor nyata. Dengan demikian, konteks DAS Bengawan Solo digunakan sebagai konteks lokasi, bukan sebagai dasar untuk mengklaim representasi kondisi hidrologis aktual.

Penelitian ini bertujuan untuk membangun model neraca massa nonlinier bagi sistem aliran air, memperoleh solusi numerik menggunakan metode Runge-Kutta orde empat, mengukur kedekatan hasil simulasi dengan pseudo-observation menggunakan beberapa indikator statistik, dan menilai kemampuan sistem memenuhi ambang debit layanan. Secara lebih luas, penelitian diharapkan memberikan kerangka analitis yang transparan untuk menguji dinamika sistem penyimpanan air sebelum dilakukan kalibrasi dan validasi menggunakan data lapangan. Hasil penelitian juga diharapkan dapat menjadi dasar pengembangan analisis sensitivitas parameter, validasi silang pada kondisi basah dan kering, serta

pengujian skenario operasi yang lebih realistis

## METODE PENELITIAN

Penelitian menggunakan desain kuantitatif berbasis simulasi numerik. Lokasi kajian ditetapkan pada Daerah Aliran Sungai (DAS) Bengawan Solo sebagai konteks penerapan model, sedangkan unit analisis berupa perubahan tinggi muka air dan debit keluar pada sistem penyimpanan air sederhana. Periode simulasi berlangsung selama 174 jam dengan 30 titik pengamatan pada interval enam jam. Variabel input terdiri atas curah hujan dan debit masuk, sedangkan variabel respons terdiri atas tinggi muka air dan debit keluar. Data observasi merupakan pseudo-observation, yaitu nilai yang dibentuk dengan gangguan pengukuran terbatas di sekitar solusi model untuk meniru variasi pengukuran tanpa mengklaim sebagai hasil pengukuran lapangan aktual. Pendekatan ini digunakan agar prosedur numerik dan validasi dapat diuji dalam kondisi yang terkendali.

Model disusun berdasarkan neraca massa dengan luas permukaan konstan. Perubahan volume penyimpanan dinyatakan melalui tinggi muka air sebagai A(dh/dt), sehingga persamaan model ditulis:

$$A(dh/dt) = Q_{in}(t) - Q_{out}(h) - Q_{loss}(h) \quad (1)$$

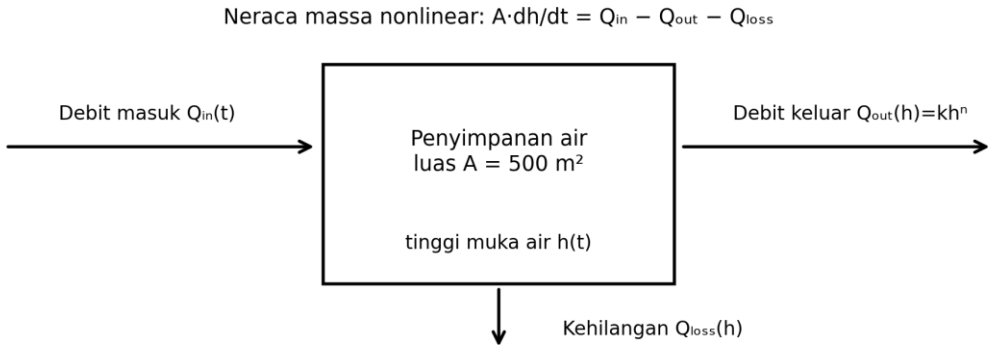
$$Q_{out}(h) = k\, h^{n} \quad (2)$$

$$Q_{loss}(h) = c\, h/(K+h) \quad (3)$$

Nilai parameter ditetapkan A = 500 $m^2$, k = 28 $m^3$/jam per $m^n$, n = 1,50, c = 3,50 $m^3$/jam, K = 0,40 m, dan tinggi awal $h_0$ = 0,85 m. Debit masuk dianggap konstan pada setiap interval enam jam sesuai nilai pada awal interval. Persamaan diferensial diselesaikan dengan RK4 menggunakan langkah 0,25 jam. Setiap interval observasi enam jam dibagi menjadi 24 langkah sehingga terdapat 696 langkah numerik selama periode 174 jam. Debit keluar simulasi dihitung dari tinggi muka air hasil integrasi menggunakan Persamaan (2).

Validasi dilakukan terhadap tinggi muka air dan debit keluar secara terpisah. Ukuran yang digunakan adalah RMSE, MAE, MAPE, $R^2$, NSE, dan KGE. Selain itu, normalitas selisih diperiksa menggunakan Shapiro-Wilk dan perbedaan rata-rata diuji menggunakan uji t berpasangan pada taraf signifikansi 5%. Reliabilitas layanan dihitung sebagai persentase periode ketika debit keluar observasi memenuhi ambang minimum 20 $m^3$/jam. Seluruh perhitungan dilakukan terhadap 30 titik observasi sehingga evaluasi mencakup kesalahan, kesesuaian pola, bias, dan kemampuan memenuhi layanan.

Struktur model konseptual disajikan pada Gambar 1.




**Gambar 1**.
Struktur konseptual sistem aliran air dan komponen neraca massa

**Tabel 1**
Definisi variabel penelitian

| Variabel | Simbol | Peran | Satuan |
|---|---|---|---|
| Waktu | t | Variabel bebas | jam |
| Curah hujan | R | Variabel input | mm/6 jam |
| Debit masuk | $Q_{in}$ | Variabel input | $m^3$/jam |
| Tinggi muka air observasi | hobs | Variabel respons | m |
| Tinggi muka air simulasi | hsim | Keluaran model | m |
| Debit keluar observasi | Qobs | Variabel respons | $m^3$/jam |
| Debit keluar simulasi | Qsim | Keluaran model | $m^3$/jam |

**Tabel 2.**
Parameter model numerik

| **Parameter** | **Simbol** | **Nilai** | **Satuan** |
|---|---|---|---|
| Luas permukaan | A | 500 | $m^2$ |
| Koefisien aliran | k | 28 | $m^3$/jam per $m^n$ |
| Eksponen nonlinear | n | 1,50 | - |
| Koefisien kehilangan | c | 3,50 | $m^3$/jam |
| Konstanta saturasi | K | 0,40 | m |
| Tinggi awal | $h_0$ | 0,85 | m |
| Langkah RK4 | $\Delta t$ | 0,25 | jam |
| Interval observasi | $\Delta T$ | 6 | jam |

## HASIL PENELITIAN

### Karakteristik dataset dan respons sistem

Dataset simulasi menghasilkan total curah hujan sebesar 190 mm selama periode 174 jam. Debit masuk memiliki rata-rata 31,93 $m^3$/jam, dengan nilai minimum 18,00 $m^3$/jam dan maksimum 70,00 $m^3$/jam. Puncak debit masuk terjadi pada jam ke-108 setelah curah hujan pada interval tersebut mencapai 25 mm/6 jam. Tinggi muka air observasi semu berkisar antara 0,760 m pada jam ke-12 dan 1,450 m pada jam ke-120. Debit keluar observasi semu berada pada

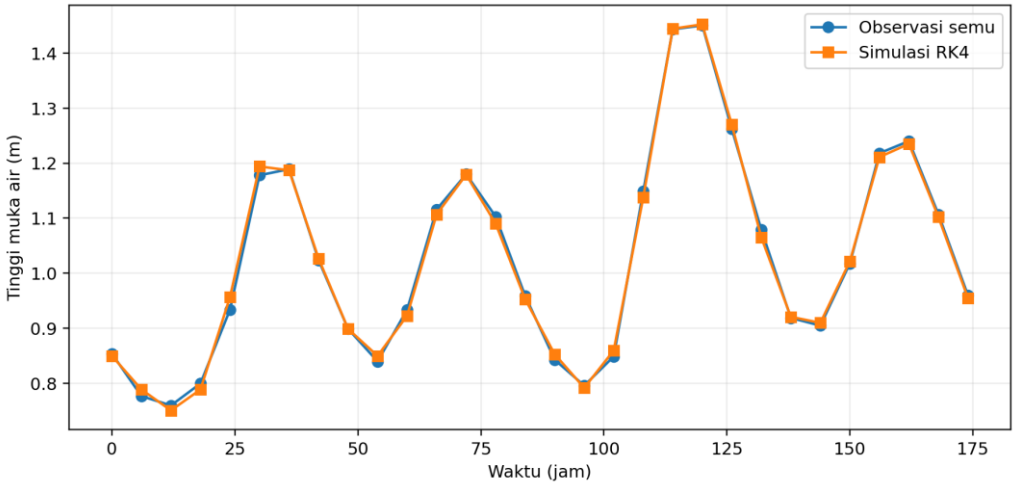
rentang 18,00–49,33 m³/jam dengan rata-rata 29,54 m³/jam. Puncak tinggi muka air terjadi sekitar 12 jam setelah puncak debit masuk.

Hasil integrasi menunjukkan bahwa lintasan tinggi muka air simulasi mengikuti pola naik-turun pseudo-observation. Ketika debit masuk meningkat, tinggi muka air bertambah dan selanjutnya debit keluar meningkat melalui fungsi $Q_{out} = kh^n$. Pada kondisi awal, tinggi muka air simulasi 0,850 m menghasilkan debit keluar sekitar 21,94 m³/jam. Ketika tinggi muka air mendekati 1,45 m, debit keluar simulasi meningkat hingga sekitar 48,98 m³/jam. Pola tersebut menunjukkan bahwa model mampu menghasilkan respons penyimpanan yang konsisten dengan struktur persamaan yang telah ditetapkan.

**Tabel 3.**
Data kuantitatif observasi semu dan hasil simulasi

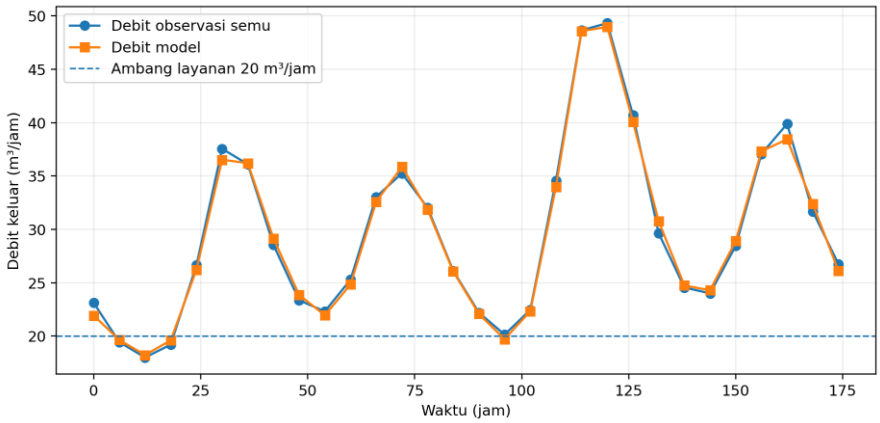
| t (jam) | Hujan (mm/6j) | Qin (m³/j) | hobs (m) | hsim (m) | Qobs (m³/j) | Qsim (m³/j) | APE (%) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 18.0 | 0.854 | 0.850 | 23.12 | 21.94 | 5.10 |
| 6 | 0 | 18.0 | 0.777 | 0.789 | 19.44 | 19.64 | 1.03 |
| 12 | 4 | 24.4 | 0.760 | 0.751 | 18.00 | 18.23 | 1.28 |
| 18 | 12 | 39.6 | 0.800 | 0.789 | 19.21 | 19.61 | 2.08 |
| 24 | 18 | 54.0 | 0.934 | 0.957 | 26.64 | 26.23 | 1.54 |
| 30 | 6 | 38.4 | 1.178 | 1.194 | 37.56 | 36.53 | 2.74 |
| 36 | 0 | 21.6 | 1.189 | 1.187 | 36.11 | 36.21 | 0.28 |
| 42 | 0 | 18.0 | 1.024 | 1.027 | 28.55 | 29.16 | 2.14 |
| 48 | 2 | 21.2 | 0.899 | 0.899 | 23.36 | 23.86 | 2.14 |
| 54 | 8 | 32.0 | 0.840 | 0.850 | 22.32 | 21.96 | 1.61 |
| 60 | 15 | 46.8 | 0.934 | 0.923 | 25.30 | 24.84 | 1.82 |
| 66 | 10 | 43.0 | 1.116 | 1.107 | 33.05 | 32.60 | 1.36 |
| 72 | 3 | 28.8 | 1.180 | 1.179 | 35.26 | 35.86 | 1.70 |
| 78 | 0 | 19.8 | 1.103 | 1.090 | 32.04 | 31.86 | 0.56 |
| 84 | 0 | 18.0 | 0.959 | 0.953 | 26.13 | 26.06 | 0.27 |
| 90 | 0 | 18.0 | 0.843 | 0.853 | 22.20 | 22.08 | 0.54 |
| 96 | 7 | 29.2 | 0.796 | 0.792 | 20.15 | 19.72 | 2.13 |
| 102 | 20 | 54.2 | 0.849 | 0.860 | 22.46 | 22.34 | 0.53 |
| 108 | 25 | 70.0 | 1.149 | 1.138 | 34.58 | 34.00 | 1.68 |
| 114 | 12 | 52.2 | 1.443 | 1.444 | 48.66 | 48.58 | 0.16 |
| 120 | 4 | 31.6 | 1.450 | 1.452 | 49.33 | 48.98 | 0.71 |
| 126 | 0 | 20.4 | 1.262 | 1.270 | 40.71 | 40.08 | 1.55 |
| 132 | 0 | 18.0 | 1.079 | 1.065 | 29.64 | 30.76 | 3.78 |
| 138 | 5 | 26.0 | 0.919 | 0.921 | 24.56 | 24.75 | 0.77 |
| 144 | 11 | 38.6 | 0.905 | 0.910 | 24.01 | 24.30 | 1.21 |
| 150 | 17 | 51.8 | 1.018 | 1.022 | 28.46 | 28.92 | 1.62 |
| 156 | 9 | 42.6 | 1.218 | 1.211 | 37.07 | 37.32 | 0.67 |
| 162 | 2 | 26.6 | 1.240 | 1.235 | 39.89 | 38.45 | 3.61 |
| 168 | 0 | 19.2 | 1.107 | 1.102 | 31.69 | 32.39 | 2.21 |
| 174 | 0 | 18.0 | 0.960 | 0.955 | 26.76 | 26.12 | 2.39 |

**Validasi tinggi muka air**




**Gambar 2.**
Perbandingan tinggi muka air observasi semu dan simulasi RK4

Validasi tinggi muka air menunjukkan bahwa perbedaan terbesar antara simulasi dan pseudo-observation sebesar 0,023 m terjadi pada jam ke-24. Bias rata-rata simulasi sebesar -0,00033 m, RMSE sebesar 0,0091 m, MAE sebesar 0,0075 m, dan MAPE sebesar 0,77%. Nilai tersebut menunjukkan bahwa kesalahan absolut dan relatif simulasi terhadap tinggi muka air berada pada tingkat rendah. Koefisien determinasi sebesar 0,9976, NSE sebesar 0,9976, dan KGE sebesar 0,9962 menunjukkan kesesuaian pola, efisiensi, serta keseimbangan korelasi, variabilitas, dan rata-rata yang tinggi.

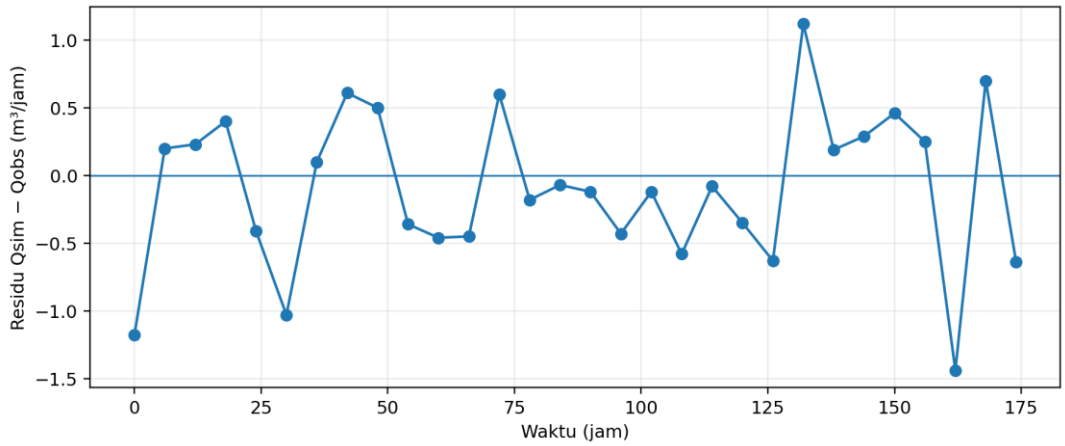



**Gambar 3.**
Perbandingan debit keluar observasi semu, debit model, dan ambang layanan

**Validasi debit keluar**

Validasi debit keluar juga menunjukkan kesesuaian yang kuat. RMSE sebesar 0,5815 m³/jam dan MAE sebesar 0,4727 m³/jam, sedangkan MAPE sebesar 1,64%. Nilai $R^2$ sebesar 0,9952, NSE sebesar 0,9949, dan KGE sebesar 0,9866. Bias debit sebesar -0,096 m³/jam menunjukkan kecenderungan model

sedikit meremehkan debit observasi semu. Kesalahan absolut terbesar sebesar 1,44 m³/jam terjadi pada jam ke-162. Residu tersebar di sekitar nol dan tidak menunjukkan kecenderungan meningkat secara terus-menerus selama periode simulasi.




**Gambar 4.**
Residu debit simulasi terhadap debit observasi semu.

**Tabel 4.**
Ringkasan indikator validasi model

| Indikator | Tinggi muka air | Debit keluar |
|---|---|---|
| RMSE | 0.0091 m | 0.5815 m³/jam |
| MAE | 0.0075 m | 0.4727 m³/jam |
| MAPE | 0.77% | 1.64% |
| $R^2$ | 0.9976 | 0.9952 |
| NSE | 0.9976 | 0.9949 |
| KGE | 0.9962 | 0.9866 |
| Bias | -0.00033 m | -0.096 m³/jam |

**Pengujian statistik berpasangan**

Uji Shapiro-Wilk terhadap selisih tinggi muka air menghasilkan p=0.296, sedangkan selisih debit menghasilkan p=0.918. Kedua nilai lebih besar dari 0,05 sehingga tidak terdapat bukti yang cukup untuk menolak asumsi normalitas selisih. Uji t berpasangan kemudian dapat digunakan sebagai pemeriksaan tambahan terhadap perbedaan rata-rata.

Uji t tinggi muka air menghasilkan t=0.198 dengan p=0.844. Uji t debit menghasilkan t=0.901 dengan p=0.375. Nilai p lebih besar dari 0,05 menunjukkan tidak terdapat perbedaan rata-rata yang signifikan antara observasi semu dan simulasi. Hasil tersebut konsisten dengan bias yang mendekati nol. Tidak signifikannya perbedaan rata-rata tidak berarti setiap titik identik, sehingga indikator RMSE, MAE, NSE, KGE, dan grafik residu tetap diperlukan.

**Evaluasi keberlanjutan dan reliabilitas aliran**

Sistem memenuhi debit sekurang-kurangnya 20 m³/jam pada 90% periode pengamatan. Tiga periode

yang tidak memenuhi ambang terjadi pada jam ke-6, 12, dan 18 dengan debit 19,44; 18,00; dan 19,21 $m^3$/jam. Ambang 18 $m^3$/jam terpenuhi pada 100% periode. Hasil tersebut menunjukkan bahwa sistem relatif andal, tetapi masih mengalami satu rangkaian defisit pada fase awal ketika debit masuk rendah dan penyimpanan belum pulih.

Reliabilitas 90% perlu ditafsirkan sesuai tujuan layanan. Sistem air baku kritis mungkin memerlukan reliabilitas lebih tinggi, sedangkan sistem penyangga nonkritis dapat menerima periode defisit terbatas. Peningkatan luas penyimpanan, pengaturan debit keluar, cadangan sumber, atau perubahan aturan operasi dapat diuji melalui skenario lanjutan. Kerangka simulasi mendukung evaluasi alternatif tanpa mengubah formulasi dasar.

Konsep keberlanjutan dalam penelitian tidak hanya berarti debit rata-rata yang tinggi. Sistem yang berkelanjutan harus mampu mempertahankan layanan, membatasi fluktuasi ekstrem, dan pulih dari kondisi kekurangan. Evaluasi jangka panjang sebaiknya menambahkan indeks resiliensi dan kerentanan, kebutuhan ekologis, kualitas air, energi operasi, serta ketidakpastian iklim. Hasil simulasi saat ini merupakan tahap awal untuk membuktikan kemampuan model dalam menghitung dinamika dan reliabilitas.

**Tabel 5.**
Statistik deskriptif dan indikator layanan

| Parameter | Nilai |
|---|---|
| Jumlah observasi | 30 |
| Durasi simulasi | 174 jam |
| Total curah hujan | 190 mm |
| Rata-rata debit masuk | 31,93 $m^3$/jam |
| Rata-rata debit keluar observasi | 29,54 $m^3$/jam |
| Debit keluar minimum-maksimum | 18,00-49,33 $m^3$/jam |
| Rata-rata tinggi muka air | 1,026 m |
| Tinggi muka air minimum-maksimum | 0,760-1,450 m |
| Reliabilitas $Q \geq 20$ $m^3$/jam | 90,00% |
| Reliabilitas $Q \geq 18$ $m^3$/jam | 100,00% |

## PEMBAHASAN

Hasil penelitian menunjukkan bahwa respons tinggi muka air yang tertunda terhadap perubahan debit masuk mencerminkan fungsi penyimpanan sebagai penyangga dinamis dalam sistem. Puncak debit masuk pada jam ke-108 tidak langsung menghasilkan puncak tinggi muka air karena sebagian air terlebih dahulu tersimpan, sementara sebagian lainnya keluar atau mengalami kehilangan. Nilai n = 1,50 menyebabkan debit keluar meningkat lebih cepat seiring kenaikan tinggi muka air sehingga kelebihan penyimpanan dapat dikurangi lebih cepat. Namun, sifat nonlinear tersebut juga meningkatkan sensitivitas keluaran terhadap parameter k dan n. Hal ini menunjukkan bahwa parameter dengan kinerja baik pada kondisi tertentu belum tentu memberikan hasil serupa pada kondisi berbeda, sebagaimana dijelaskan Herrera (2022) dan Thirel et al. (2024).

Kesalahan tinggi muka air yang rendah serta nilai $R^2$, NSE, dan KGE

yang mendekati satu menunjukkan bahwa metode Runge-Kutta orde empat (RK4) mampu menghasilkan lintasan numerik yang dekat dengan pseudo-observation. Meskipun demikian, nilai metrik yang tinggi tidak secara langsung membuktikan validitas hidrologis model karena dapat dipengaruhi karakteristik data dan ketidakpastian sampel (Clark et al., 2021; Cinkus et al., 2023). Perbedaan KGE antara tinggi muka air dan debit keluar menunjukkan bahwa kesalahan dapat terpropagasi melalui hubungan nonlinear $Q = kh^n$, sehingga validasi tinggi muka air tidak otomatis menunjukkan tingkat kesalahan yang sama pada debit keluar. Hasil uji t berpasangan yang tidak menunjukkan perbedaan rata-rata signifikan juga mengindikasikan tidak adanya bias rata-rata yang besar, tetapi tetap perlu dipertimbangkan bersama RMSE, MAE, MAPE, NSE, KGE, dan pemeriksaan residu.

Reliabilitas sebesar 90% pada ambang 20 $m^3$/jam menunjukkan kemampuan model dalam mengevaluasi pemenuhan tingkat layanan sistem. Namun, reliabilitas sangat bergantung pada fungsi sistem dan tidak dapat menjadi satu-satunya ukuran keberlanjutan, sehingga perlu dipertimbangkan bersama aspek resilience dan vulnerability (Zeng et al., 2024; Waheed et al., 2023). Penggunaan pseudo-observation menjadi keterbatasan utama karena data tersebut dibentuk di sekitar solusi model, sehingga validasi lebih mencerminkan konsistensi numerik daripada kemampuan model menghadapi kesalahan pengukuran lapangan. Selain itu, sistem direpresentasikan sebagai satu unit penyimpanan dengan luas permukaan konstan dan belum mempertimbangkan heterogenitas spasial, perubahan geometri, aliran balik, sedimentasi, evaporasi, serta proses hidrologis lainnya. Periode simulasi yang relatif pendek juga menyebabkan nilai reliabilitas belum dapat menggambarkan kinerja jangka panjang. Oleh karena itu, penelitian ini lebih tepat dipandang sebagai validasi metodologis kerangka model daripada validasi hidrologis DAS Bengawan Solo secara menyeluruh.

Penelitian lanjutan perlu menggunakan data tinggi muka air, debit, dan curah hujan aktual dengan resolusi waktu yang konsisten, melakukan kalibrasi dan validasi pada periode berbeda, serta menguji sensitivitas parameter A, k, n, c, K, dan langkah waktu. Pengembangan model juga dapat mencakup aturan operasi, kapasitas maksimum penyimpanan, kebutuhan air, serta indikator resiliensi dan kerentanan. Dengan pengembangan tersebut, kerangka neraca massa yang sederhana dapat menjadi dasar menuju model yang lebih kompleks dan relevan sebagai alat pendukung keputusan dalam pengelolaan sistem air berkelanjutan.

## SIMPULAN

Model persamaan diferensial nonlinier berbasis neraca massa berhasil merepresentasikan dinamika penyimpanan, debit keluar, dan kehilangan air pada dataset simulatif 174 jam. Metode Runge-Kutta orde empat dengan langkah 0,25 jam menghasilkan lintasan tinggi muka air yang stabil dan mengikuti observasi semu. Validasi menunjukkan RMSE tinggi muka air sebesar 0,0091 m dan RMSE debit sebesar 0,5815 $m^3$/jam. Nilai $R^2$, NSE, dan KGE berada

mendekati satu, sedangkan MAPE debit sebesar 1,64%. Uji t berpasangan tidak menemukan perbedaan rata-rata yang signifikan. Reliabilitas pemenuhan debit minimal 20 $m^3$/jam mencapai 90%, dengan defisit terbatas pada tiga periode awal. Kesimpulan metodologis menunjukkan bahwa kombinasi model nonlinear, RK4, beberapa indikator validasi, dan ukuran reliabilitas dapat digunakan sebagai kerangka penelitian kuantitatif sistem aliran air. Kesimpulan empiris tentang kondisi hidrologis aktual DAS Bengawan Solo belum dapat dibuat karena data bersifat sintetis. Implementasi lapangan memerlukan kalibrasi parameter, data sensor nyata, validasi independen, dan analisis ketidakpastian.

## DAFTAR PUSTAKA


Aerts, J. P. M., Hoch, J. M., Coxon, G., van de Giesen, N. C., & Hut, R. W. (2024). on The Importance of Discharge Observation Uncertainty When Interpreting Hydrological Model Performance. *Hydrology and Earth System Sciences, 28*, 5011–5030. https://doi.org/10.5194/hess-28-5011-2024

Cinkus, G., Mazzilli, N., Jourde, H., Wunsch, A., Liesch, T., Ravbar, N., Chen, Z., & Goldscheider, N. (2023). When Best is The Enemy of Good - Critical Evaluation of Performance Criteria in Hydrological Models. *Hydrology and Earth System Sciences, 27*, 2397-2411. https://doi.org/10.5194/hess-27-2397-2023

Clark, M. P., Vogel, R. M., Lamontagne, J. R., Mizukami, N., Knoben, W. J. M., Tang, G., Gharari, S., Freer, J. E., Whitfield, P. H., Shook, K. R., & Papalexiou, S. M. (2021). The Abuse of Popular Performance Metrics in Hydrologic Modeling. *Water Resources Research, 57*(9), e2020WR029001. https://doi.org/10.1029/2020WR029001

Dal Molin, M., Kavetski, D., Albert, C., & Fenicia, F. (2023). Exploring Signature-Based Model Calibration for Streamflow Prediction in Ungauged Basins. *Water Resources Research, 59*, e2022WR031929. https://doi.org/10.1029/2022WR031929

Gauch, M. (2023). In Defense of Metrics: Metrics Sufficiently Encode Typical Human Preferences Regarding Hydrological Model Performance. *Water Resources Research, 59*(6), e2022WR033918. https://doi.org/10.1029/2022WR033918

Gaur, S. (2022). Spatial Pattern-Based Performance Evaluation and Uncertainty Analysis of a Distributed Hydrological Model. *Hydrological Processes, 36*(5), e14586. https://doi.org/10.1002/hyp.14586

Giudicianni, C., Assaf, M. N., Todeschini, S., & Creaco, E. (2023). Comparison of Nonlinear Reservoir and UH Algorithms for the Hydrological Modeling of a Real Urban Catchment with EPASWMM. *Hydrology, 10*(1), 24.

https://doi.org/10.3390/hydrology10010024

Hairer, E., Nørsett, S. P., & Wanner, G. (1993). Solving Ordinary Differential Equations I: *Nonstiff Problems* (2nd rev. ed.). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-540-78862-1

Hernandez-Suarez, J. S., & Nejadhashemi, A. P. (2022). Probabilistic Predictions of Ecologically Relevant Hydrologic Indices Using A Hydrological Model. *Water Resources Research, 58*(9), e2021WR031104. https://doi.org/10.1029/2021WR031104

Herrera, P. A. (2022). Parameter Estimation and Uncertainty Analysis in Hydrological Modeling. *WIREs Water, 9*, e1569. https://doi.org/10.1002/wat2.1569

Hodson, T. O. (2022). Root-Mean-Square Error (RMSE) or Mean Absolute Error (MAE): When To Use Them or Not. *Geoscientific Model Development, 15*, 5481-5487. https://doi.org/10.5194/gmd-15-5481-2022

Huang, T., & Merwade, V. (2024). Beyond a Fixed Number: Investigating Uncertainty in Popular Evaluation Metrics of Ensemble Flood Modeling Using Bootstrapping Analysis. *Journal of Flood Risk Management, 17*(2), e12982. https://doi.org/10.1111/jfr3.12982

Intergovernmental Panel on Climate Change. (2022). Climate Change 2022: Impacts, Adaptation and Vulnerability - Chapter 4: *Water. Cambridge University Press.* https://doi.org/10.1017/9781009325844

Lee, J. S., & Choi, H. I. (2022). A Rebalanced Performance Criterion for Hydrological Model Calibration. *Journal of Hydrology, 606*, 127372. https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2021.127372

Liu, D. (2020). A Rational Performance Criterion for Hydrological Model. *Journal of Hydrology, 590*, 125488. https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2020.125488

Morlot, M., Rigon, R., & Formetta, G. (2024). Hydrological Digital Twin Model of A Large Anthropized Italian Alpine Catchment: The Adige River Basin. *Journal of Hydrology, 629*, 130587. https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2023.130587

Oliveira, D. Y. de, & Vrugt, J. A. (2022). The Treatment of Uncertainty an Hydrometric Observations: a Probabilistic Description of Streamflow Records. *Water Resources Research, 58*(11), e2022WR032263. https://doi.org/10.1029/2022WR032263

Tang, Y., et al. (2023). The Impact of Meteorological Forcing Uncertainty on Hydrological Modeling: a Global Analysis of Cryosphere Basins. *Water Resources Research*. https://doi.org/10.1029/2022WR033767

Thirel, G., Santos, L., Delaigue, O., & Perrin, C. (2024). on The Use of Streamflow Transformations for Hydrological Model Calibration. *Hydrology and Earth System Sciences*, *28*, 4837–4860. https://doi.org/10.5194/hess-28-4837-2024

UNESCO World Water Assessment Programme. (2024). The United Nations World Water Development Report 2024: *Water for Prosperity and Peace. UNESCO*.

Waheed, S. Q., Alobaidy, M. N., & Grigg, N. S. (2023). Resilience Appraisal of Water Resources System Under Climate Change Influence Using a Probabilistic-Nonstationary Approach. *Environments*, *10*(5), 87. https://doi.org/10.3390/environments10050087

Wu, C.-W., Chou, F. N.-F., & Brady, D. (2026). From Risk to Resilience: Quantifying Water Security Through Reliability and Robustness Analysis with simulation-optimization framework. *Journal of Hydrology: Regional Studies*, *64*, 103144. https://doi.org/10.1016/j.ejrh.2026.103144

Yan, B., et al. (2023). Large Ensemble Diagnostic Evaluation of Hydrologic Parameter Uncertainty in the Community Land Model Version 5 (CLM5). *Journal of Advances in Modeling Earth Systems*. https://doi.org/10.1029/2022MS003312

Zeng, Y., Liu, D., Guo, S., Xiong, L., Liu, P., Chen, J., Chen, H., Yin, J., Wu, Z., & Zhou, W. (2024). Assessment of The Impacts of Water Resources Allocation on The Reliability, Resilience and Vulnerability of The Water-Energy-Food-Society Nexus System. Agricultural *Water Management*, *295*, 108780. https://doi.org/10.1016/j.agwat.2024.108780